



Resumão

julho

Sólidos de revolução

Objetivos

Observar o que são e como são formados os sólidos de revolução e seus elementos.

Se liga

Para essa aula é importante que tenha visto sobre: cilindros, cones, esferas e tronco de cones.

Curiosidade

Se você observar, ao longo do texto foi utilizada a palavra revolução ao invés de rotação, pois a revolução significa um giro de 360° , ou seja, uma rotação completa.

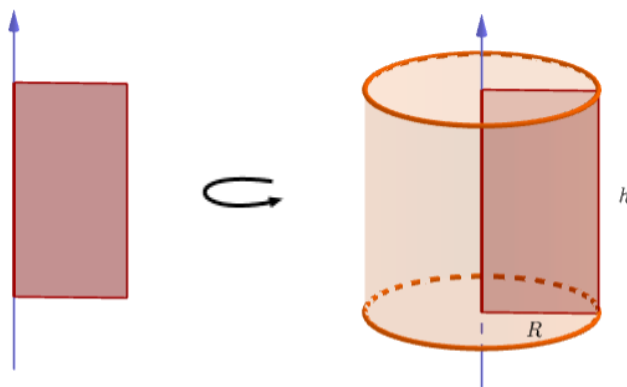
Teoria

Sólidos de revolução

É uma figura sólida formada pela rotação completa (360°) de uma figura plana em torno de uma linha que é chamada de eixo. Aqui veremos alguns desses sólidos de revolução importantes para o nosso estudo. São eles o cilindro reto, cone reto, tronco de cone e esfera.

Cilindro reto

É um sólido obtido pela revolução completa de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados. Observe a figura abaixo:



Podemos observar que a base do retângulo será igual ao raio da base (R) do cilindro reto formado e que a altura do retângulo é igual à altura (h) do cilindro que também é igual a geratriz do cilindro.

Obs: Em algumas questões pode aparecer o nome “cilindro de revolução”, como o cilindro reto também é chamado.

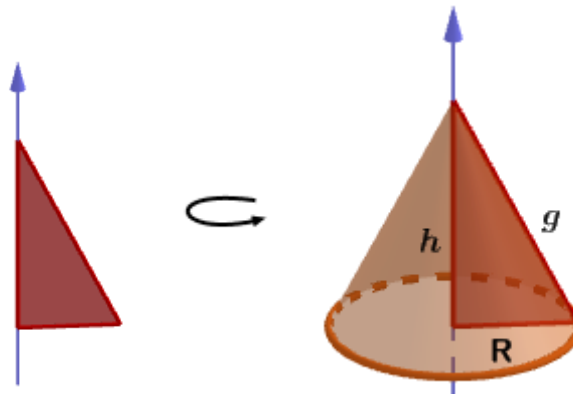
Calculamos o volume e a área da mesma forma que calculávamos antes:

$$V_{cilindro} = \pi \cdot R^2 \cdot h$$

$$A_{total\ cilindro} = 2\pi R(R + h)$$

Cone Reto

É um sólido obtido pela revolução completa de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos. Observe a figura abaixo:



Podemos observar que a base do triângulo retângulo é igual ao raio da base (R) do cone. O cateto no qual o triângulo foi girado é igual à altura (h) do cone e a hipotenusa do triângulo retângulo é igual à geratriz (g) do cone. A partir disso, podemos tirar uma relação que é muito útil em questões sobre cones que é

$$g^2 = h^2 + R^2$$

Obs: Assim como vimos no cilindro, em algumas questões pode aparecer o nome “cone de revolução”, como o cone reto também é chamado.

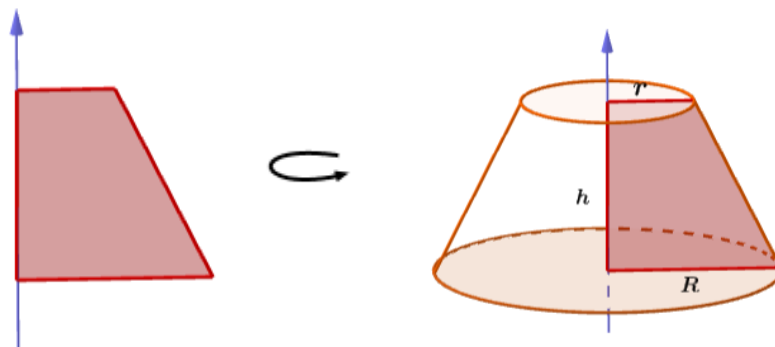
Calculamos o volume e a área da mesma forma que calculamos antes:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$$

$$A_{total\ cone} = \pi R(R + g)$$

Tronco de cone

É um sólido obtido pela revolução completa de um trapézio retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados (lado que forma 90° com as bases). Observe a figura abaixo:



Podemos observar que a altura do trapézio é igual à altura (h) do tronco de cone, a base menor é igual ao raio menor (r) e a base maior do trapézio é igual ao raio maior (R) do tronco de cone.

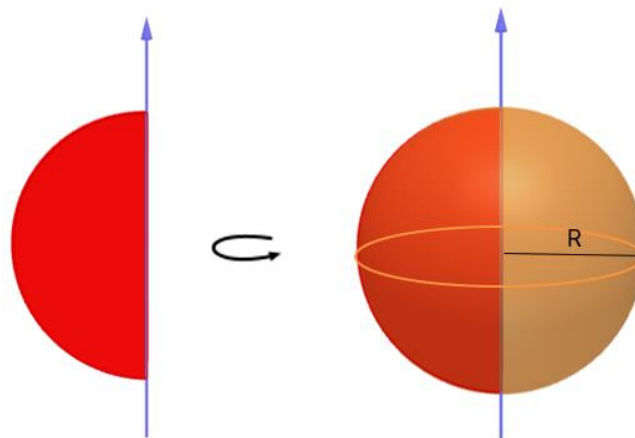
Calculamos o volume e a área da mesma forma que calculávamos antes:

$$V_{\text{tronco de cone}} = \frac{\pi h}{3} \cdot [R^2 + Rr + r^2]$$

$$A_{\text{total tronco de cone}} = \pi[r^2 + R^2 + g(R + r)]$$

Esfera

É um sólido obtido pela revolução completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém o seu diâmetro. Observe a figura abaixo:



Podemos observar que o raio do semicírculo é igual ao raio da esfera (R) obtida após a rotação completa.

Calculamos o volume e a área da mesma forma que calculávamos antes:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$A_{\text{total esfera}} = 4\pi R^2$$

Como vimos, podemos calcular a área e o volume dos sólidos de resolução da mesma forma que calculávamos antes, como vimos, mas há teoremas que podem também nos ajudar a encontrar o volume e a área desses sólidos. Esses teoremas são os Teoremas de Pappus-Guldin que dizem o seguinte:

Primeiro teorema:

$A_{\text{total}} = 2\pi \cdot x \cdot L$, em que x = distância do baricentro da figura plana até o eixo de rotação e L = perímetro da figura plana que será rotacionada.

Segundo teorema:

$V = 2\pi \cdot x \cdot A$, em que x = distância do baricentro da figura plana até o eixo de rotação e A = área da figura plana que será rotacionada.

Exercícios de fixação

1. O volume do sólido gerado pela rotação de um quadrado de base 2 m e altura 4 m é igual a, em m^3 :
 - a) 4π
 - b) 8π
 - c) 12π
 - d) 16π

 2. Dado um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 5 cm, fazendo a revolução em torno de um de seus catetos que mede 4 cm obtemos um _____ de volume igual a ____ πcm^3
 - a) Cone e 12.
 - b) Cone e 10.
 - c) Tronco de cone e 14.
 - d) Nenhuma das respostas anteriores.

 3. O sólido de revolução gerado pela rotação de um trapézio de base maior igual a 8 cm, base menor igual a 6 cm e altura igual a 9 cm é igual a: (adote $\pi = 3$)
 - a) $1332 cm^3$
 - b) $1000 cm^3$
 - c) $4332 cm^3$
 - d) $132 cm^3$

 4. Um semicírculo de raio igual a 3 cm é rotacionado em torno do seu diâmetro gerando um sólido de revolução chamado esfera. O volume dessa esfera será igual a:
 - a) $32\pi cm^3$
 - b) $36\pi cm^3$
 - c) $34\pi cm^3$
 - d) $35\pi cm^3$
-

5. (Funcab, 2010) No ensino de geometria, nas séries iniciais, tem sua importância social o reconhecimento do universo tridimensional. Pensando nisso, uma professora levou para uma de suas aulas os objetos abaixo:

I. Uma caixa de sapato (paralelepípedo).

II. Uma lata de leite em pó (cilindro).

III. Uma bola de futebol (esfera).

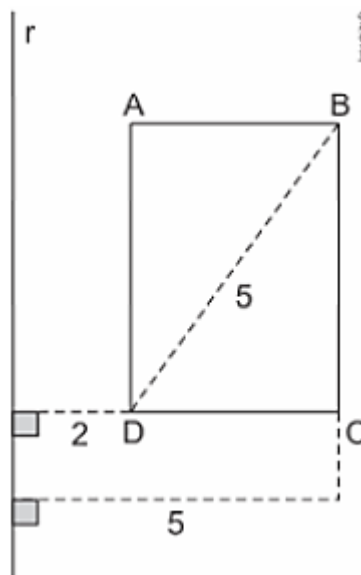
Os sólidos acima são, respectivamente:

- a) poliedro, sólido de revolução e poliedro.
 - b) sólido de revolução, poliedro e poliedro.
 - c) sólido de revolução, sólido de revolução e poliedro.
 - d) poliedro, sólido de revolução e sólido de revolução.
 - e) sólido de revolução, sólido de revolução e sólido de revolução.
-

Exercícios de vestibulares



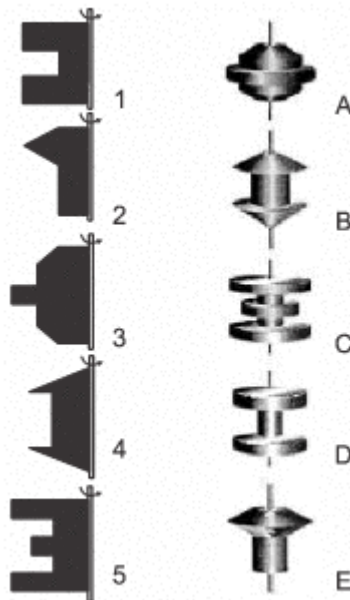
1. (UFRGS, 2019) Considere o sólido obtido pela revolução do retângulo ABCD em torno da reta r conforme indicado na figura a seguir.



O volume do sólido obtido é

- a) 16π
- b) 84
- c) 100
- d) 84π
- e) 100π

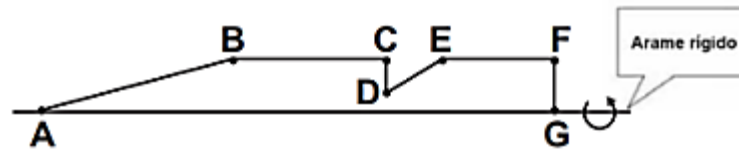
2. (Enem, 1999) Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Girando-se as figuras abaixo em torno da haste indicada obtêm-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.



A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

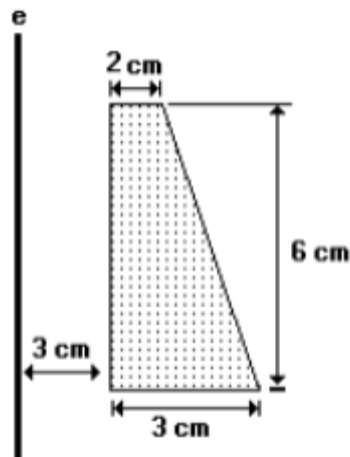
- a) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E.
- b) 1B, 2C, 3D, 4E, 5A.
- c) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C.
- d) 1D, 2E, 3A, 4B, 5C.
- e) 1D, 2E, 3B, 4C, 5A.

3. (Enem, 2ª aplicação, 2010) Numa feira de artesanato, uma pessoa constrói formas geométricas de aviões, bicicletas, carros e outros engenhos com arame inextensível. Em certo momento, ele construiu uma forma tendo como eixo de apoio outro arame retilíneo e rígido, cuja aparência é mostrada na figura seguinte:



Ao girar tal forma em torno do eixo, formou-se a imagem de um foguete, que pode ser pensado como composição, por justaposição, de diversos sólidos básicos de revolução. Sabendo que, na figura, os pontos B, C, E e F são colineares, $AB = 4FG$, $BC = 3FG$, $EF = 2FG$, e utilizando-se daquela forma de pensar o foguete, a decomposição deste, no sentido da ponta para a cauda, é formada pela seguinte sequência de sólidos:

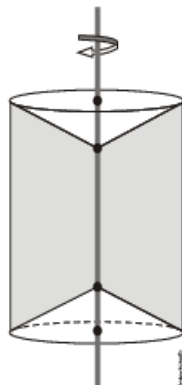
- pirâmide, cilindro reto, cone reto, cilindro reto.
 - cilindro reto, tronco de cone, cilindro reto, cone equilátero.
 - cone reto, cilindro reto, tronco de cone e cilindro equilátero.
 - cone equilátero, cilindro reto, pirâmide, cilindro.
 - cone, cilindro equilátero, tronco de pirâmide, cilindro
4. (Unirio, 1997) O volume do sólido gerado pela rotação completa da figura a seguir, em torno do eixo e , é, em cm^3 :



- 38π
- 54π
- 92π
- 112π
- 128π

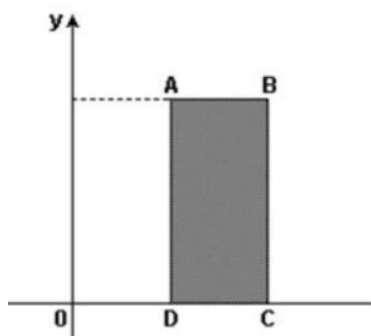


5. (UEMG, 2014) Uma empresa deseja fabricar uma peça maciça cujo formato é um sólido de revolução obtido pela rotação de um trapézio isósceles em torno da base menor, como mostra a figura a seguir. As dimensões do trapézio são: base maior igual a 15 cm, base menor igual a 7 cm e altura do trapézio igual a 3 cm



Considerando-se $\pi = 3$, o volume, em litros, da peça fabricada corresponde a

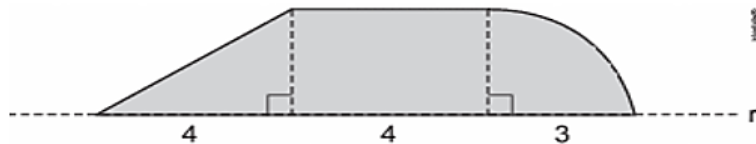
- a) 0,212.
 - b) 0,333.
 - c) 0,478.
 - d) 0,536.
6. (Puc-SP, 2004) O retângulo ABCD seguinte, representado num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, é tal que $A = (2; 8)$, $B = (4; 8)$, $C = (4; 0)$ e $D = (2; 0)$.



Girando-se esse retângulo em torno do eixo das ordenadas, obtém-se um sólido de revolução cujo volume é

- a) 24π
- b) 32π
- c) 36π
- d) 48π
- e) 96π

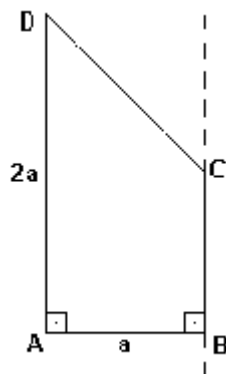
7. (ESPM, 2019) A figura abaixo é formada por um triângulo retângulo, um retângulo e um quadrante de círculo.



O volume do sólido obtido pela rotação completa dessa figura em torno da reta r é igual a:

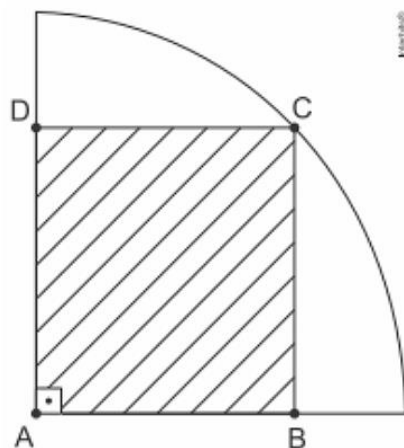
- a) 72π
 - b) 54π
 - c) 48π
 - d) 66π
 - e) 76π
8. (PM-ES Exatus, 2013) O volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo isósceles de lados congruentes medindo 5 cm e base medindo 6 cm, em torno da base é igual a:
- a) $32\pi \text{ cm}^3$
 - b) $13\pi \text{ cm}^3$
 - c) $14\pi \text{ cm}^3$
 - d) $15\pi \text{ cm}^3$
 - e) $16\pi \text{ cm}^3$

9. (Unesp, 1991) No trapézio ABCD da figura a seguir, os ângulos internos em A e B são retos, e o ângulo interno em D é tal que sua tangente vale $5/6$. Se $AD = 2 \cdot AB$, o volume do sólido obtido ao se girar o trapézio em torno da reta por B e C é dado por:



- a) $\frac{3\pi a^3}{4}$
- b) $\frac{5\pi a^3}{8}$
- c) $\frac{6\pi a^3}{5}$
- d) $\frac{20\pi a^3}{13}$
- e) $\frac{8\pi a^3}{5}$

10. (Cefet-MG, 2015) Na figura a seguir, ABCD é um retângulo inscrito em um setor circular de raio R com $AB = \frac{2}{3}R$



O volume do sólido de revolução gerado pela rotação desse retângulo em torno de um eixo que contenha o segmento AD, em função de R, é igual a

- a) $\frac{\sqrt{3}\pi R^3}{3}$
- b) $\frac{8\pi R^3}{9}$
- c) $\frac{4\sqrt{5}\pi R^3}{27}$
- d) $\frac{10\pi R^3}{49}$
- e) $\frac{5\sqrt{5}\pi R^3}{54}$

Se liga!

Sua específica é matemática e quer continuar treinando esse conteúdo?
Clique [aqui](#) para fazer uma lista extra de exercícios.

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. D

O sólido formado será um cilindro de raio igual a 2 m e de altura igual a 4 m. Logo, calculando o volume desse cilindro reto será

$$V_{cilindro} = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi \text{ m}^3$$

2. A

Fazendo a rotação completa desse triângulo retângulo, obtemos um cone de geratriz igual a 5 cm e altura igual a 4 cm. Usando a relação $g^2 = h^2 + R^2$, obtemos que o raio será

$$5^2 = 4^2 + R^2 \rightarrow 25 - 16 = R^2 \rightarrow 9 = R^2 \rightarrow R = 3 \text{ cm}$$

Visto isso, calculando o volume do cone gerado, temos

$$V_{cone} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 12\pi \text{ cm}^3$$

3. A

O sólido formado é o tronco de cone de raio menor igual a 6 cm, raio maior igual a 8 cm e altura igual a 9 cm. Calculando o volume, temos

$$V = \frac{9\pi}{3} (8^2 + 6^2 + 8 \cdot 6) = 3\pi \cdot 148 = 444\pi \text{ cm}^3$$

4. B

Como o raio do semicírculo é igual ao raio da esfera, temos que o volume da esfera será igual a

$$V = \frac{4\pi \cdot R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} = 4\pi \cdot 9 = 36\pi \text{ cm}^3$$

5. D

O cilindro e a esfera são sólidos de revolução e o paralelepípedo é um poliedro.

Exercícios de vestibulares

1. D

Calculando:

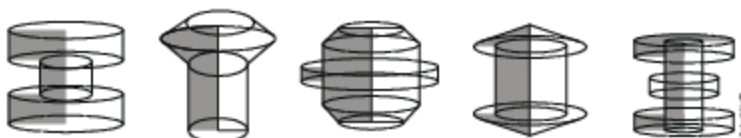
$$5^2 = 3^2 + BC^2 \Rightarrow BC = 4$$

Logo, o volume será:

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 - \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 100\pi - 16\pi = 84\pi$$

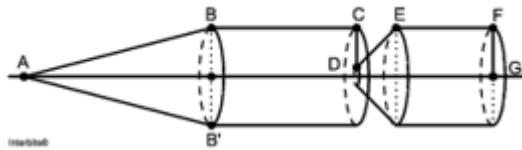
2. D

Observe as figuras a seguir, temos que ao fazermos a rotação em torno do eixo, obtemos:



3. C

Girando a forma em torno do arame rígido, obtemos a figura abaixo.



Portanto, a decomposição do foguete, no sentido da ponta para cauda, é formada pela seguinte sequência de sólidos: cone reto ($AB = 4FG \neq BB' = 2FG$), cilindro reto ($BC = 3FG \neq 2FG$), tronco de cone e cilindro equilátero ($EF = 2FG$).

4. E

Esse é o volume do tronco com um volume cilíndrico "oco" no meio

A fórmula do volume do tronco é $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$.

Neste caso

$h = 6 \text{ cm}$ (altura do trapézio),

$R = 3 + 3 = 6 \text{ cm}$ (distância entre o eixo e o polígono + base maior)

$r = 3 + 2 = 5 \text{ cm}$ (distância entre o eixo e o polígono + base menor)

$$V_t = \frac{\pi \cdot 6}{3}(6^2 + 5^2 + 6 \cdot 5) = 182\pi$$

O volume "oco" é o de um cilindro

$$V_c = \pi \cdot s^2 \cdot h$$

$h = 6 \text{ cm}$ (altura de trapézio), $s = 3 \text{ cm}$ (distância do eixo ao polígono)

$$V_c = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi$$

O volume pedido é o volume do tronco menos a parte "oca"

$$V = 182\pi - 54\pi = 128\pi$$

5. B

Volume da embalagem em cm^3 : $V = V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}}$

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 135\pi - 24\pi = 111\pi = 111 \cdot 3 = 333 \text{ cm}^3 = 0,333L$$

6. E

Ao girar o retângulo em torno do eixo y, obteremos um cilindro cujo interior é "vazio", para calcularmos o volume deste sólido, iremos calcular primeiro o volume do cilindro maior (cheio) e subtrair dele o volume do cilindro menor (vazio).

$$V_{\text{sólido}} = V_{\text{maior}} - V_{\text{menor}}$$

$$V_{\text{sólido}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 - \pi \cdot 2^2 \cdot 8$$

$$V_{\text{sólido}} = \pi \cdot 8(16 - 4)$$

$$V_{\text{sólido}} = \pi \cdot 8 \cdot 12 = 96\pi \text{ u.v}$$

7. D

O volume do sólido obtido pela rotação será o

$$V = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cone}} + V_{\text{semiesfera}}$$

Volume do cilindro:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h, \text{ temos que } r = 3, h = 4, \text{ logo}$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi$$

Volume do cone:

$$V_{cone} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}, \text{ temos que } r = 3, h = 4, \text{ logo}$$

$$V_{cone} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 12\pi$$

Volume da semiesfera:

$$V_{semiesfera} = \frac{2\pi r^3}{3}, \text{ temos } r = 3, \text{ logo}$$

$$V_{semiesfera} = \frac{2\pi \cdot 3^3}{3} = 18\pi$$

Portanto,

$$V = V_{cilindro} + V_{cone} + V_{semiesfera} = 36\pi + 12\pi + 18\pi = 66\pi$$

8. A

Ao fazermos a rotação do triângulo isósceles em torno do eixo vertical, obtemos dois cones iguais. Então calcularemos o volume de um deles e depois multiplicaremos por 2.

Note que a altura desse triângulo isósceles mede 4 cm. (Lembre-se: a altura divide a base em dois segmentos iguais. Assim, temos dois triângulos retângulos pitagóricos 3, 4 e 5).

Logo, o raio dos dois cones é 4 cm e a altura mede 3 cm.

Visto isso, já podemos calcular o volume desse cone

$$V_{cone} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 3}{3} = 16\pi$$

Agora multiplicando por 2

$$V = 2V_{cone} = 2 \cdot 16\pi = 32\pi$$

9. E

Após a rotação, temos que o volume do sólido formado é igual a

$$V = V_{cilindro} - V_{cone}$$

Temos um cilindro de raio $r = a$ e altura $h = 2a$

Sua área será $V = \pi r^2 \cdot h = 2\pi a^3$

Já no cone, temos que o raio $r = a$ e a altura $h' = AD - BC$, temos que $AD = 2a$. Calculando o BC, obtemos

$$\operatorname{tg}(D) = \frac{AB}{h'} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{a}{h'} \Rightarrow h' = \frac{6a}{5}$$

Portanto, o volume do cone será

$$V_{cone} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot \frac{6a}{5}}{3} = \frac{2\pi a^3}{5}$$

Então,

$$V = V_{cilindro} - V_{cone} = 2\pi a^3 - \frac{2\pi a^3}{5} = \frac{10\pi a^3 - 2\pi a^3}{5} = \frac{8\pi a^3}{5}$$

10. c

Traçando a diagonal desse retângulo ABCD, temos que $AC = R$. Como $AB = \frac{2}{3}R$, fazendo Pitágoras no triângulo retângulo ABC formado pela hipotenusa AC e catetos AB e BC, temos

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$R^2 = \left(\frac{2}{3}R\right)^2 + BC^2$$

$$R^2 = \frac{4}{9}R^2 + BC^2$$

$$9R^2 = 4R^2 + 9BC^2 \rightarrow 5R^2 = 9BC^2 \rightarrow \frac{5}{9}R^2 = BC^2 \rightarrow BC = \frac{R\sqrt{5}}{3}$$

O volume do sólido de revolução formado, será o volume do cilindro de raio AB e altura BC, portanto

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \left(\frac{2}{3}R\right)^2 \cdot \frac{R\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}\pi R^3}{27}$$

Projeção ortogonal

Objetivos

Aprender a fazer a projeção ortogonal de reta, ponto e sólidos geométricos. Além disso, compreender que existem diferentes vistas de um mesmo objeto.

Se liga

Para essa aula, é importante conhecer as figuras que formam os principais sólidos: **polígonos**, **prismas**, **cilindro**, **pirâmide** e **cone** (caso não seja direcionado, pesquise por "Estudo dos polígonos", "Prismas", "Cilindros", "Pirâmides" e "Cones", respectivamente, na biblioteca).

Curiosidade

Você sabia que quando falamos sobre as relações métricas nos triângulos retângulos, usamos o conceito de projeção? Quando falamos sobre "projeção do cateto sobre a hipotenusa", estamos falando sobre a projeção ortogonal dele sobre a hipotenusa.

Teoria

"A geometria é o ramo da matemática que se propõe a estudar as figuras existentes na natureza através das propriedades de seus elementos, definindo, caracterizando e padronizando suas formas e dimensões, facilitando assim seu próprio desenvolvimento e o de outras áreas do conhecimento científico e tecnológico."

(RABELLO, P.S.B., 2005)

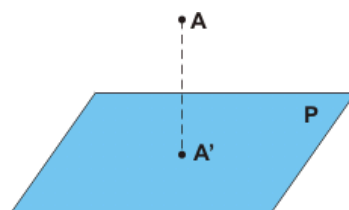
"A projeção ortogonal é a representação de um objeto em um plano de projeção, quando as linhas visuais são perpendiculares a este plano."

(HOELSCHER, R.P.; SPRINGER, C.H.; DOBROVOLNY, J.S., 1978)

A projeção ortogonal das figuras geométricas sobre um plano pode ser comparada à sombra desse objeto sob a luz do sol do meio-dia.

Projeção ortogonal de um ponto sobre o plano

A projeção ortogonal do ponto A sobre o plano é exatamente o ponto de encontro entre esse plano e a reta ortogonal a ele que contém o ponto A. A projeção ortográfica de um ponto num plano é sempre um ponto idêntico a ele mesmo.

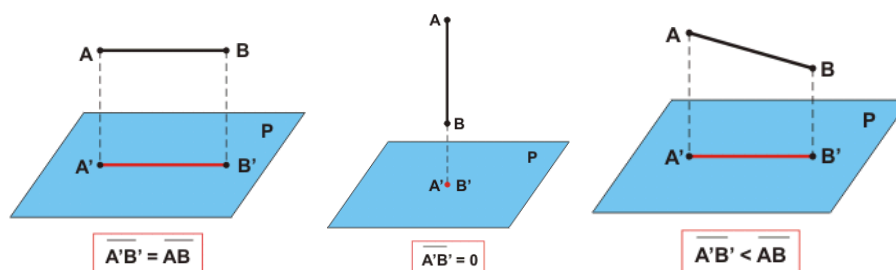


Projeção ortogonal de um segmento de reta sobre o plano

A projeção ortogonal de um segmento de reta sobre o plano pode ser um ponto ou outro segmento de reta, vai depender do ângulo que eles formam com o plano.

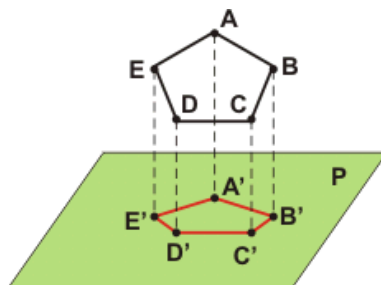
- Se o segmento de reta já for ortogonal ao plano (formar um ângulo de 90°), a sua projeção ortogonal será apenas um **ponto**.
- Se o segmento de reta não for ortogonal ao plano, sua projeção ortogonal será o **segmento de reta** cujas extremidades são as projeções de suas extremidades sobre o plano.

Exemplos:



Projeção ortogonal de uma figura geométrica

Dado o plano P e a figura ABCDE, a projeção ortogonal de ABCDE sobre P será o conjunto de pontos formado pelas projeções ortogonais de todos os pontos de ABCDE sobre P.



Exercícios de fixação

1. A projeção ortogonal de um segmento de reta que forma um ângulo reto com seu plano de projeção será:
 - a) Ponto;
 - b) Dois pontos;
 - c) Reta;
 - d) Infinitos pontos.

 2. Em qual caso a projeção de um segmento de reta será um segmento de reta de mesmo tamanho?
 - a) Segmento de reta perpendicular ao plano.
 - b) Segmento de reta que faz um ângulo α com o plano.
 - c) Segmento de reta paralelo ao plano.
 - d) Segmento de reta na vertical.

 3. A projeção ortogonal de um cilindro cuja base é paralela ao plano de projeção será:
 - a) Quadrado;
 - b) Reta;
 - c) Triângulo;
 - d) Círculo.

 4. Dado um cone, a projeção ortogonal em um plano que está paralelo à lateral desse cone será:
 - a) Quadrado;
 - b) Triângulo;
 - c) Círculo;
 - d) Ponto.

 5. A projeção ortogonal de uma pirâmide de base quadrada, cuja base está paralela ao plano de projeção, será:
 - a) Quadrado;
 - b) Triângulo;
 - c) Pentágono;
 - d) Hexágono.
-

Exercícios de vestibulares



1. (Enem, 2019) Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrada na figura.

PINE

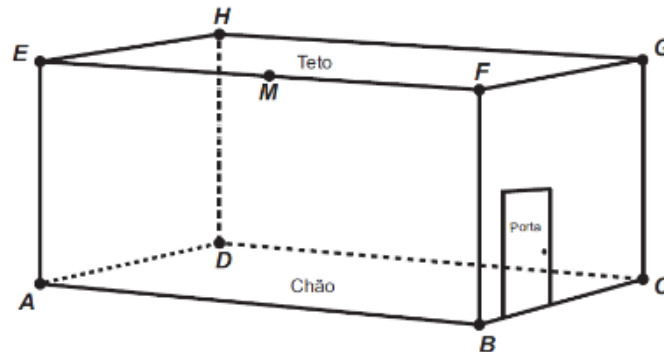
Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes é o mesmo, todas têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado a seguir.



Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo. A sombra projetada no solo é

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

2. (Enem, PPL, 2017) Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura:



A lagartixa parte do ponto B e vai até o ponto A. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto M, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto M até o ponto H. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

3. (Enem, 2012) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.



Figura 1

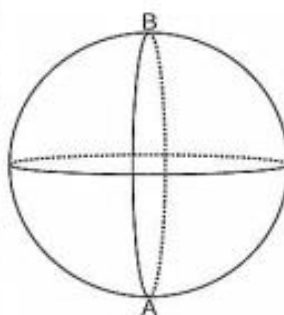


Figura 2

Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B. A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por:

a)



c)



e)



b)



d)





4. (Enem, 2016) Um grupo de escoteiros mirins, numa atividade num parque da cidade onde moram, montou uma barraca conforme a foto da Figura 1. A Figura 2 mostra o esquema da estrutura dessa barraca, em forma de um prisma reto, em que foram usadas hastes metálicas.



Figura 1

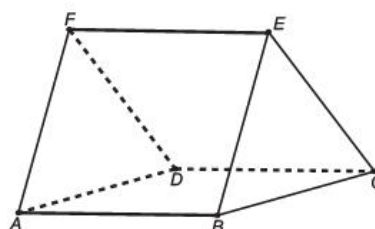
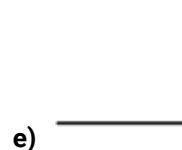
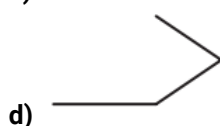
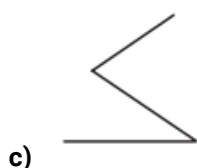
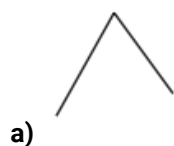
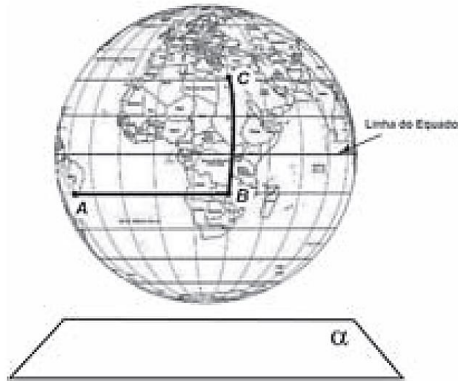


Figura 2

Após a armação das hastes, um dos escoteiros observou um inseto deslocar-se sobre elas, partindo do vértice A em direção ao vértice B, deste em direção ao vértice E e, finalmente, fez o trajeto do vértice E ao C. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os pontos. A projeção do deslocamento do inseto no plano que contém a base ABCD é dada por:



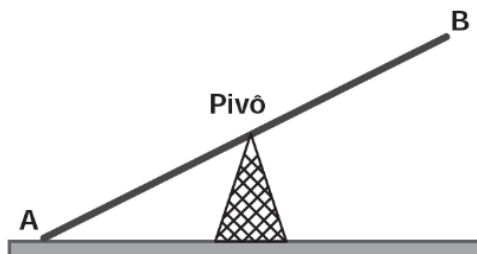
5. (Enem, 2016) A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.



A projeção ortogonal, no plano α , do caminho traçado no globo pode ser representada por:

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

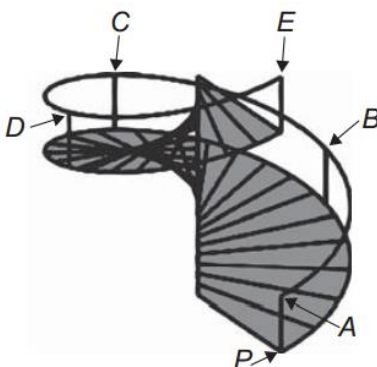
6. (Enem, 2013) Gangorra é um brinquedo que consiste em uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra. Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:



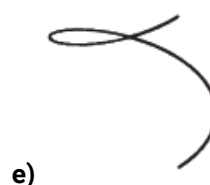
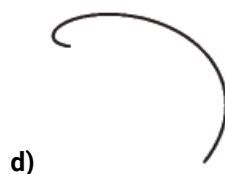
A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

- a) $\dot{A}$ $\dot{B}$ c) $\left(\begin{array}{c} \text{A} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{B} \end{array} \right)$ e) $\begin{array}{c} \text{A} \end{array} \begin{array}{c} \text{B} \end{array}$
- b) A B d) $\begin{array}{c} \text{A} \end{array} \begin{array}{c} \text{B} \end{array}$

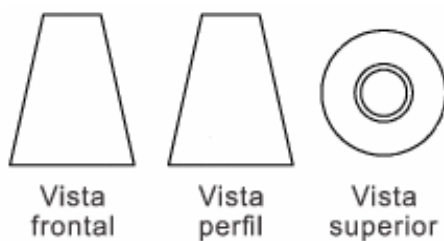
7. (Enem, 2014) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A, B, C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.



A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

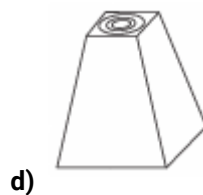
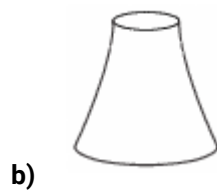
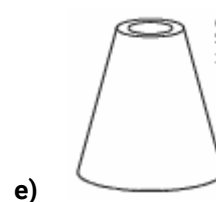
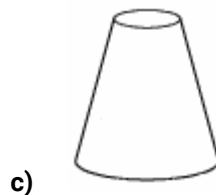
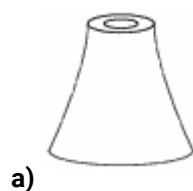


8. (Enem, PPL, 2020) No desenho técnico, é comum representar um sólido por meio de três vistas (frontal, perfil e superior), resultado da projeção do sólido em três planos, perpendiculares dois a dois. A figura representa as vistas de uma torre:

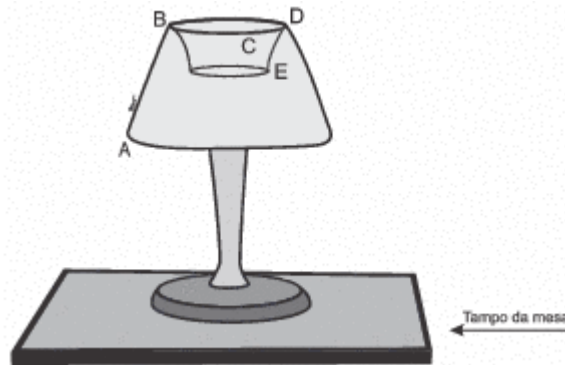


Disponível em: www.uems.br.
Acesso em: 11 dez. 2012 (adaptado).

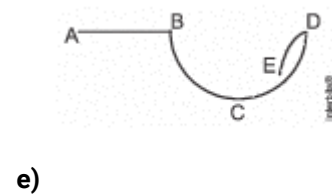
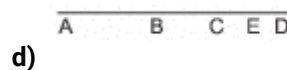
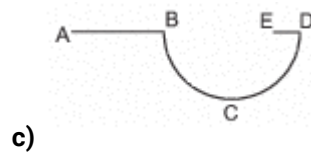
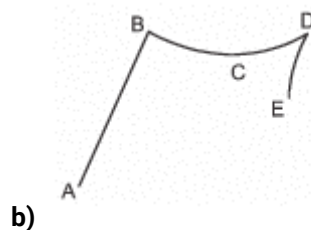
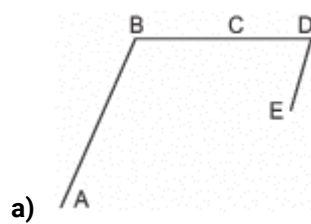
Com base nas vistas fornecidas, qual figura representa melhor essa torre?



9. (Enem, PPL, 2020) Uma formiga move-se sobre um castiçal de vidro transparente, do ponto A para B, em linha reta, percorre o arco circular BCD, sendo C localizado na parte da frente do castiçal, e desce o arco DE, como representado na figura.



Os pontos A, B, D e E estão sobre um mesmo plano perpendicular à mesa sobre a qual se encontra o castiçal. A projeção ortogonal, sobre o plano da mesa, do trajeto percorrido pela formiga, do ponto A até o ponto E, é mais bem representada por:



Texto para a questão 10

O Atomium, representado na imagem, é um dos principais pontos turísticos de Bruxelas. Ele foi construído em 1958 para a primeira grande exposição mundial depois da Segunda Guerra Mundial, a Feira Mundial de Bruxelas.

Trata-se de uma estrutura metálica construída no formato de um cubo. Essa estrutura está apoiada por um dos vértices sobre uma base paralela ao plano do solo, e a diagonal do cubo, contendo esse vértice, é ortogonal ao plano da base. Centradas nos vértices desse cubo, foram construídas oito esferas metálicas, e uma outra esfera foi construída centrada no ponto de interseção das diagonais do cubo. As oito esferas sobre os vértices são interligadas segundo suas arestas, e a esfera central se conecta a elas pelas diagonais do cubo.

Todas essas interligações são feitas por tubos cilíndricos que possuem escadas em seu interior, permitindo o deslocamento de pessoas pela parte interna da estrutura. Na diagonal ortogonal à base, o deslocamento é feito por um elevador, que permite o deslocamento entre as esferas da base e a esfera do ponto mais alto, passando pela esfera central.

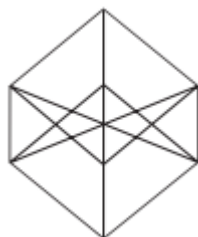
Considere um visitante que se deslocou pelo interior do Atomium sempre em linha reta e seguindo o menor trajeto entre dois vértices, passando por todas as arestas e todas as diagonais do cubo.



Disponível em: <http://trupedatrip.com>. Acesso em: 25 out. 2019.

10. (Enem, 2021) A projeção ortogonal sobre o plano do solo do trajeto percorrido por esse visitante é representada por

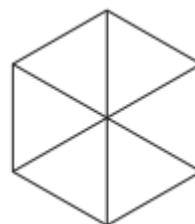
a)



c)



e)



b)



d)



Se liga!

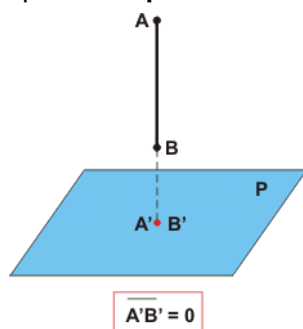
Sua específica é exatas e quer continuar treinando esse conteúdo?
Clique [aqui](#) para fazer uma lista extra de exercícios.

Gabaritos

Exercícios de fixação

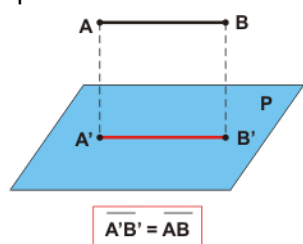
1. A

Se o segmento de reta já for ortogonal ao plano (formar um ângulo de 90°), a sua projeção ortogonal será apenas um **ponto**.



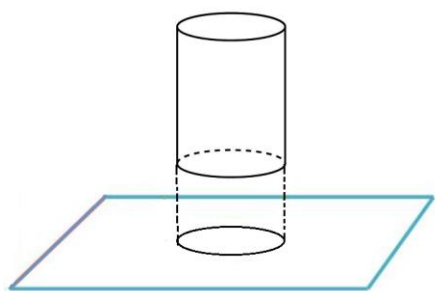
2. C

A projeção de um segmento de reta AB paralelo ao plano é um segmento reta A'B' de mesmo tamanho que AB.



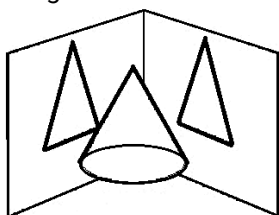
3. D

A projeção ortogonal de um cilindro cuja base está paralela ao plano de projeção será o círculo da base do cilindro.



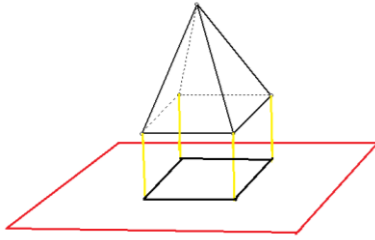
4. B

A projeção ortogonal de um cone em um plano que está paralelo à sua lateral será a figura de um triângulo.



5. A

Podemos observar que a projeção ortogonal em relação ao plano será o quadrado da base da pirâmide.



Exercícios de vestibulares

1. E

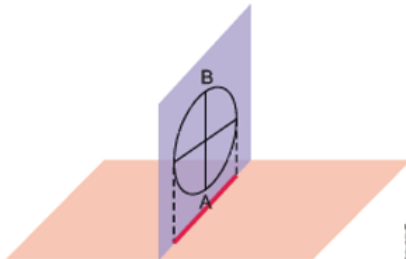
A única alternativa que exhibe espaçamentos iguais entre as letras é a E.

2. B

Sendo B, A e M coplanares, a projeção ortogonal do deslocamento de A para M está contida no segmento AB. Ademais, a projeção ortogonal do deslocamento de M para H sobre o chão do quarto corresponde a um segmento de reta oblíquo em relação a AB, cuja origem é o ponto M', médio de AB, e cuja extremidade é o ponto D, projeção de H sobre o plano ABC.

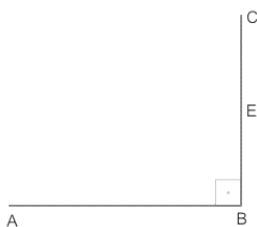
3. E

O plano que contém trajeto do motociclista é perpendicular ao plano do chão, portanto a projeção ortogonal do trajeto do motociclista no plano do chão é um segmento de reta.



4. E

A projeção é



5. E

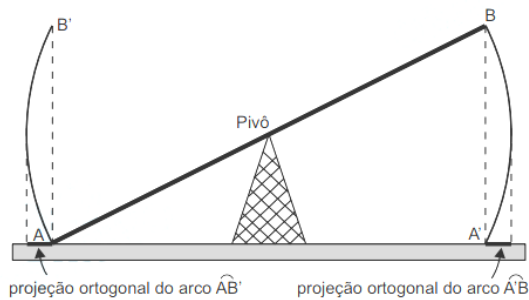
Sabemos que:

- I. A projeção ortogonal de uma parte de um paralelo sobre o plano α , paralelo ao plano equatorial é um arco de circunferência;

- II. A projeção ortogonal de uma parte de um meridiano sobre o mesmo plano α é um segmento de reta. Consideremos o ponto D, intersecção entre o meridiano e a linha do equador. Assim, a projeção ortogonal, do caminho traçado no globo pode ser representado por:



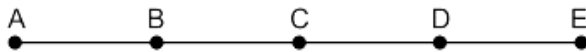
6. B



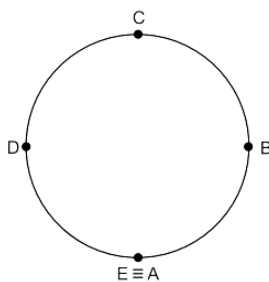
As trajetórias dos pontos A e B são dois arcos de circunferência, com centro no pivô, localizados num mesmo plano perpendicular ao plano do chão. Assim, suas projeções ortogonais sobre o plano do chão são um par de segmentos da reta de intersecção desse tal plano com o plano do chão, conforme ilustrado na figura acima.

7. C

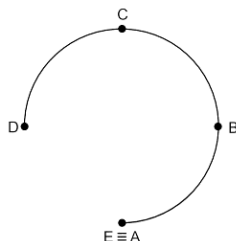
Se os cinco pontos, A, B, C, D e E, estão igualmente espaçados, o corrimão planificado é um segmento de reta dividido em quatro partes iguais.



A projeção ortogonal do corrimão completo sobre o piso (plano) é uma circunferência.



A projeção do ponto A ao ponto D corresponde a $\frac{3}{4}$ da circunferência.



8. E

Desde que a projeção ortogonal da secção meridiana de um tronco de cone reto é um trapézio isósceles, a única alternativa que representa o tronco de um cone e um possível cilindro reto inscrito é a E.

9. C

Sabendo que os pontos A, B, D e E estão sobre um mesmo plano perpendicular à mesa, podemos afirmar que suas projeções ortogonais sobre o plano da mesa são pontos colineares. Ademais, como o arco BCD pertence a um plano paralelo ao plano da mesa, podemos concluir que só pode ser a figura apresentada na alternativa C.

10. E

As projeções ortogonais dos dois vértices do cubo que pertencem à diagonal perpendicular ao plano do solo coincidem, e são o centro de um hexágono cujos vértices são as projeções ortogonais dos outros seis vértices do cubo. Isso está representado na alternativa [E].

Noções de geometria analítica: distância entre pontos, ponto médio e perímetros

Objetivos

Relacionar elementos da geometria plana com coordenadas do plano cartesiano e compreender suas consequências.

Se liga

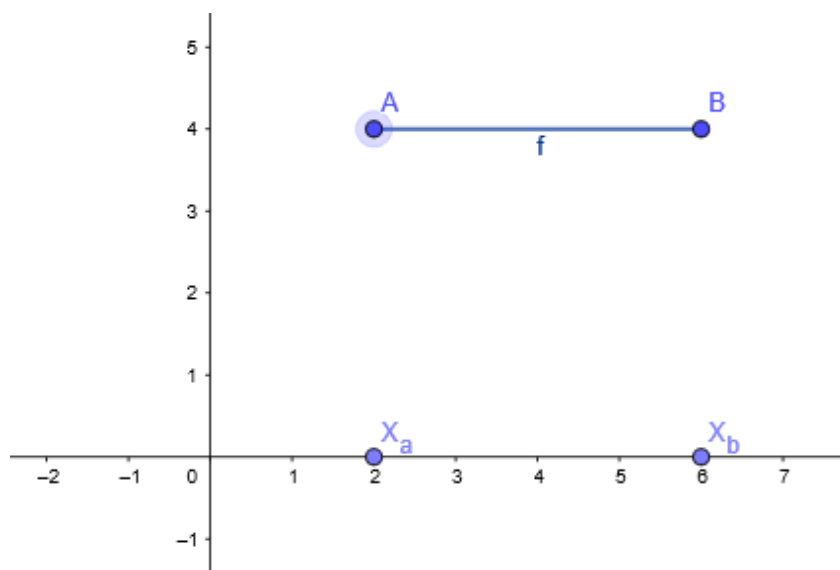
Para essa aula, é muito importante conhecer o plano cartesiano e estar por dentro das operações algébricas.

Teoria

Distância entre dois pontos

Dados dois pontos, A e B, do plano cartesiano, chama-se distância entre eles a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidades.

1º caso: o segmento AB é paralelo ao eixo x.



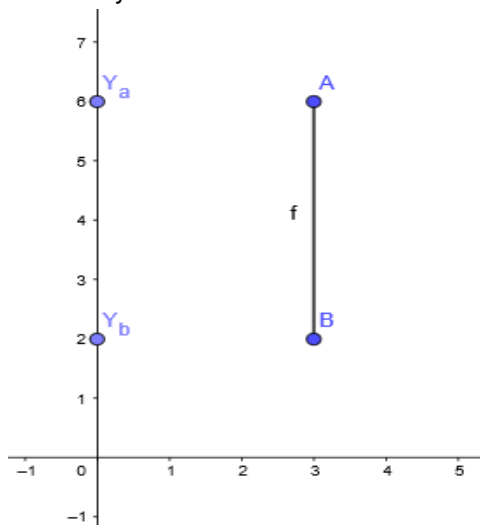
Então a distância entre A e B é dada pelo módulo da diferença entre as abscissas de A e B, isto é:

$$d_{AB} = |x_b - x_a|$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}d_{AB} &= |6 - 2| \\d_{AB} &= 4\end{aligned}$$

2º caso: o segmento AB é paralelo ao eixo y.



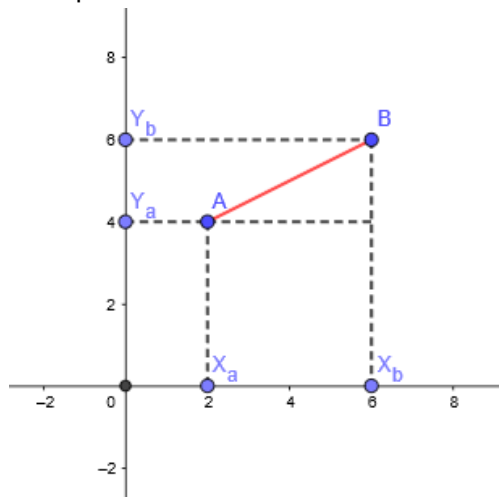
Então a distância entre A e B é dada pelo módulo da diferença entre as ordenadas de A e B, isto é:

$$d_{AB} = |y_b - y_a|$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} d_{AB} &= |6 - 2| \\ d_{AB} &= 4 \end{aligned}$$

3º caso: quando o segmento AB não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados.

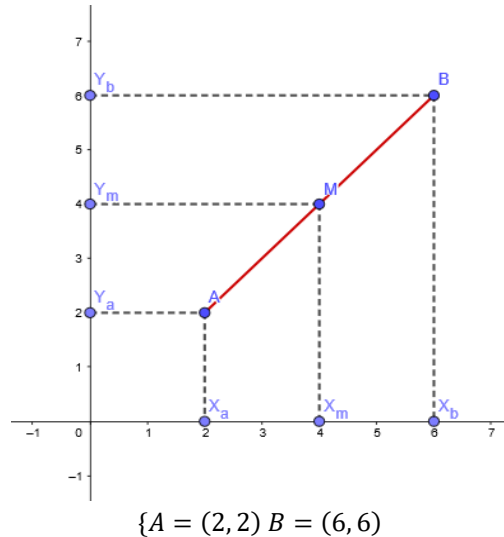


Nesse caso, podemos visualizar um triângulo, que tem como hipotenusa o segmento AB. Temos, então, pelo teorema de Pitágoras, a distância entre A e B dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Ponto médio

Ponto médio é o ponto de equilíbrio de um segmento de reta. Podemos pensar, também, que é o ponto localizado exatamente no meio do segmento de reta.



Para encontrar as coordenadas do ponto médio, tiramos a média das coordenadas dos pontos A e B:

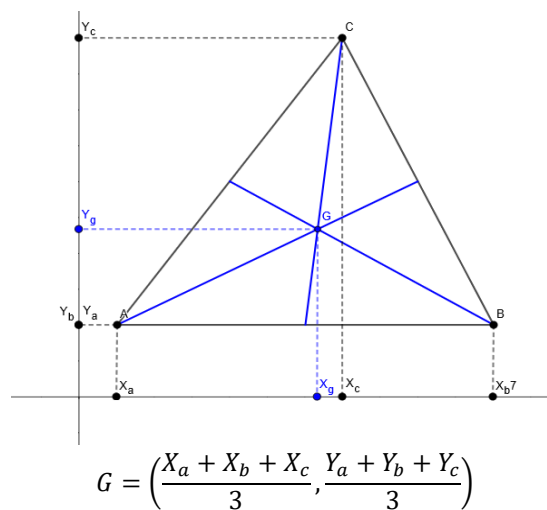
$$M = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2} \right)$$

No exemplo, temos $M = (4, 4)$.

Baricentro do triângulo

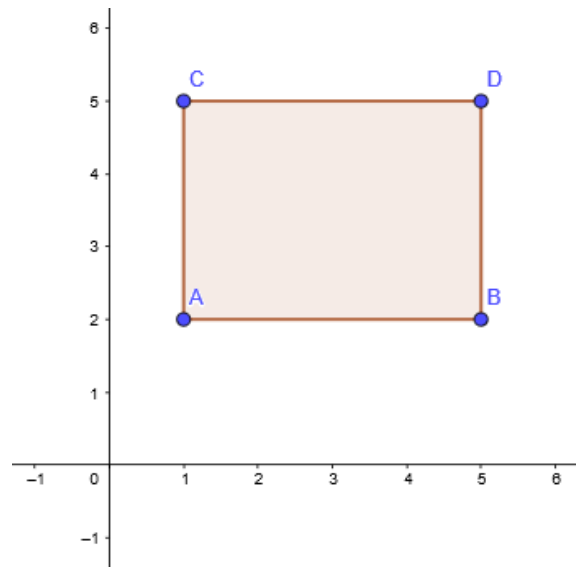
O baricentro também é conhecido como ponto de equilíbrio do triângulo. Ele é formado pelo encontro das três medianas do triângulo. Abaixo, aprenderemos a encontrá-lo no plano cartesiano.

- A mediana de um triângulo é um segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.



Perímetros

O perímetro de uma figura poligonal é a soma das medidas dos lados de uma figura. Logo, precisamos usar os conhecimentos da distância entre dois pontos, para descobrir a medida de cada lado da figura e, assim, encontrar o seu perímetro. Exemplo: calcule o perímetro da seguinte figura.



$$D(AB) = 3$$

$$D(BC) = 4$$

$$D(CD) = 3$$

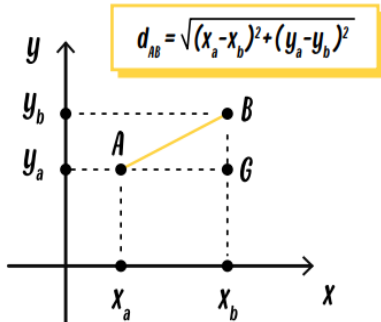
$$D(DA) = 4$$

Logo o perímetro é: $3 + 3 + 4 + 4 = 14$

PONTO

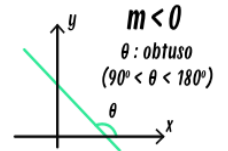
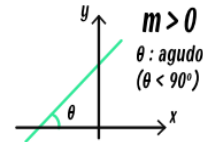
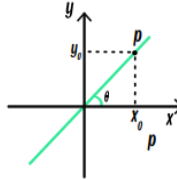
RETAS

$$m = \operatorname{tg} \theta$$

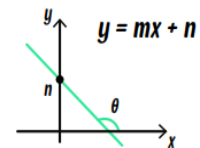


EQUAÇÃO FUNDAMENTAL

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



EQUAÇÃO REDUZIDA



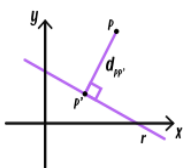
EQUAÇÃO GERAL

$$ax + by + c = 0$$

Ex: $y = -2x + 3$
 $2x + y - 3 = 0$

DISTÂNCIA

ENTRE UM PONTO E UMA RETA



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

GEOMETRIA ANALÍTICA

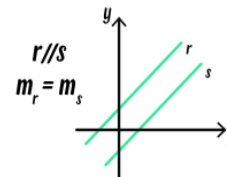
descomplica

ENTRE RETAS PARALELAS

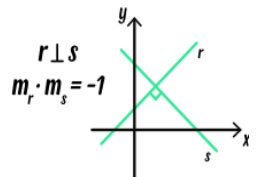
calcular a distância entre o ponto de uma reta e a outra reta

RELAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES

retas paralelas



retas perpendiculares



Exercícios de fixação

1. Dados os pontos A (2, -3) e B (4, 5), determine a distância entre eles.
 2. Determine a distância entre os pontos traçados a seguir, sendo eles: P (-2, 3) e Q (-5, -9).
 3. A distância do ponto A (3, a) ao ponto B (0, 2) é igual a 3. Calcule o valor da ordenada **a**.
 4. Determine as coordenadas que localizam o ponto médio entre A (4, 3) e B (2, -1).
 5. Determine o perímetro do triângulo ABC, cujas coordenadas são: A (3, 3), B (-5, -6) e C (4, -2).
-

Exercícios de vestibulares



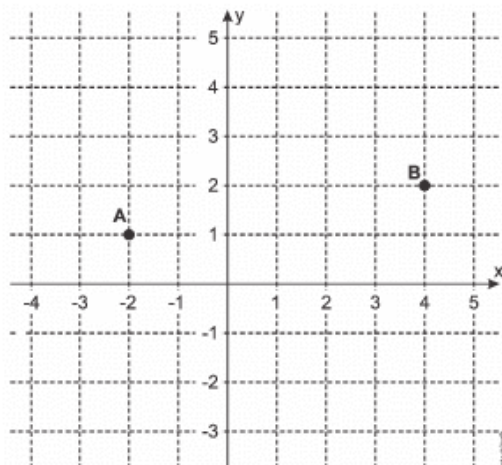
1. (Upe, 2017) Qual é a medida da área e do perímetro do losango cujos vértices são A (2, 3), B (1, 0), C (0, 3) e D (1, 6)? **Dados:** $\sqrt{10} \approx 3,2$.
 - a) Área = 6 e perímetro = 12,8.
 - b) Área = 6 e perímetro = 10,4.
 - c) Área = 12 e perímetro = 22,3.
 - d) Área = 12 e perímetro = 25,9.
 - e) Área = 18 e perímetro = 27,1.

 2. (Puc, 2017) Assinale o valor da área do quadrado de vértices $(-2, 9)$, $(4, 6)$, $(1, 0)$ e $(-5, 3)$.
 - a) 20.
 - b) 25.
 - c) 30.
 - d) 45.
 - e) 60.

 3. (Eear, 2019) Sejam A (3, 3), B (3, 1), C (5, -3) e D (-1, -2) vértices de um quadrilátero convexo, a medida de uma de suas diagonais é:
 - a) 15;
 - b) 13;
 - c) 12;
 - d) 10.
-



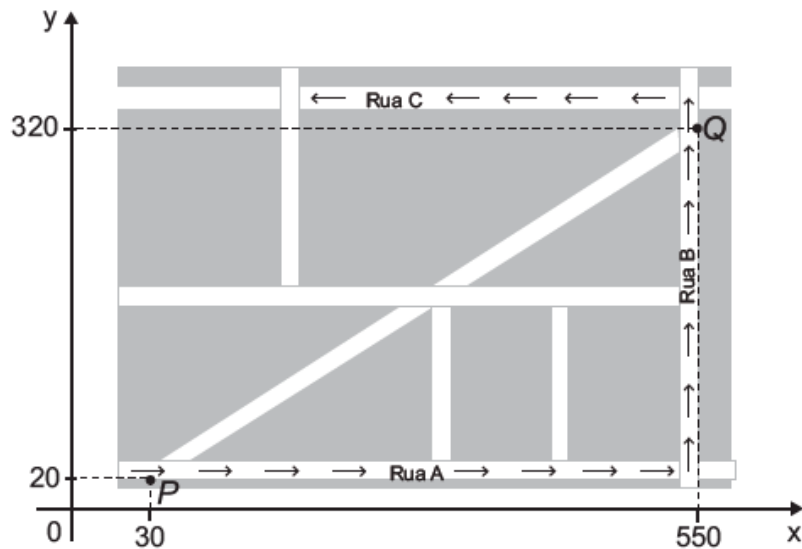
4. (Feevale, 2016) Na figura a seguir, o ponto A representa uma praça e o ponto B, uma livraria.



Considerando quilômetro como unidade de medida, a menor distância entre a praça e a livraria é de aproximadamente

- a) 4 km.
 - b) 5 km.
 - c) 6 km.
 - d) 7 km.
 - e) 8 km.
5. (Enem LIBRAS, 2017) Foi utilizado o plano cartesiano para a representação de um pavimento de lojas. A loja A está localizada no ponto A (1, 2). No ponto médio entre a loja A e a loja B, está o sanitário S, localizado no ponto S (5, 10). Determine as coordenadas do ponto de localização da loja B.
- a) (-3, -6).
 - b) (-6, -3).
 - c) (3, 6).
 - d) (9, 18).
 - e) (18, 9).
6. (Eear, 2017) Seja ABC um triângulo tal que A (1, 1), B (3, -1) e C (5, 3). O ponto _____ é o baricentro desse triângulo.
- a) (2, 1).
 - b) (3, 3).
 - c) (1, 3).
 - d) (3, 1).

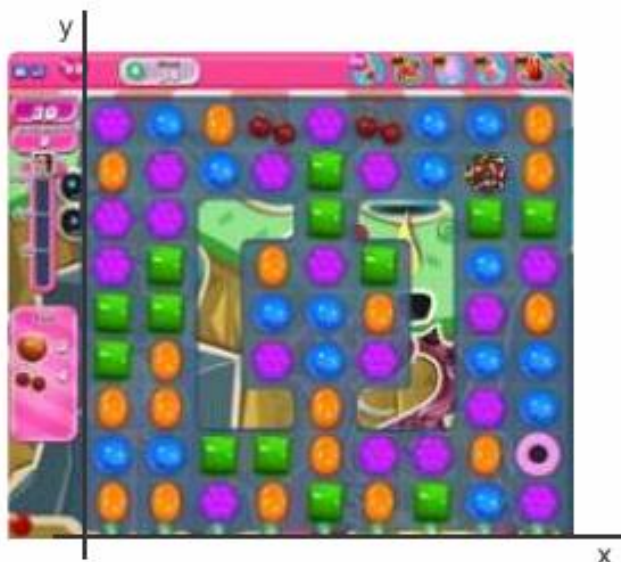
7. (Enem, 2015) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais. De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

- a) (290, 20).
- b) (410, 0).
- c) (410, 20).
- d) (440, 0).
- e) (440, 20).

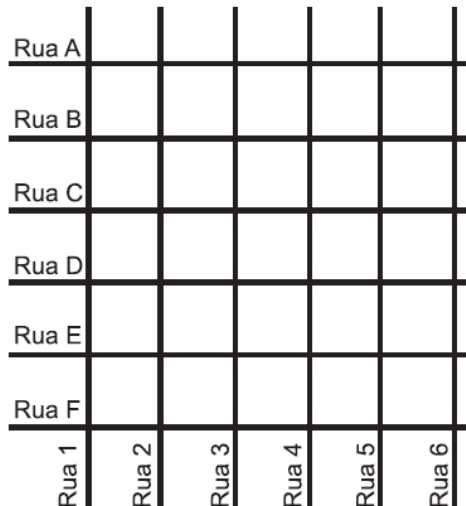
8. (IFPE, 2017) O *Candy Crush* é um dos jogos que virou febre nos últimos anos. Um joguinho no qual você precisa combinar doces simples e doces especiais que se encontram numa espécie de plano cartesiano. Há, na imagem abaixo, dois doces especiais: uma bomba colorida, que se encontra no ponto (8, 8); e uma rosquinha de coco, que se encontra no ponto (9, 2). Tomou-se como referencial o plano cartesiano indicado na imagem. Baseados nessas informações, podemos afirmar que a distância entre a bomba colorida e a rosquinha de coco, no plano cartesiano abaixo, é



Disponível em: <<https://www.dicascityville.com/wp-content/uploads/2013/02/vidas-infinitas-no-candy-crush-saga-dicas-cityville-tudo-sobre-jogos-sociais-300x258.jpg>>. Acesso em: 20 maio 2017.

- a) $\sqrt{27}$
- b) $\sqrt{35}$
- c) $\sqrt{7}$
- d) $\sqrt{37}$
- e) 7

9. (Enem, 2016) Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.



A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A. Com base nesses dados, o imóvel que atende às pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

- a) 3 e C.
 - b) 4 e C.
 - c) 4 e D.
 - d) 4 e E.
 - e) 5 e C.
10. (Eear, 2016) Considere os segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, em que $A(0, 10)$, $B(2, 12)$, $C(-2, 3)$, e $D(4, 3)$. O segmento $\overline{MN}$, determinado pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, é dado pelos pontos M e N, pertencentes, respectivamente, a $\overline{AB}$ e a $\overline{CD}$. Assinale a alternativa que corresponde corretamente à medida do segmento $\overline{MN}$.
- a) 5.
 - b) 6.
 - c) 7.
 - d) 8.

Se liga!

Sua específica é matemática e quer continuar treinando esse conteúdo? Clique [aqui](#) para fazer uma lista extra de exercícios.

Gabaritos

Exercícios de fixação

$$\begin{aligned}
 1. \quad D &= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \\
 D &= \sqrt{(4 - 2)^2 + (5 - (-3))^2} \\
 D &= \sqrt{4 + 64} D = \sqrt{68} D = 2\sqrt{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad D &= \sqrt{(-5 - (-2))^2 + (-9 - 3)^2} \\
 D &= \sqrt{(-5 + 2)^2 + (-12)^2} \\
 D &= \sqrt{(-3)^2 + 144} \\
 D &= \sqrt{9 + 144} \\
 D &= \sqrt{153}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad 2 \\
 3^2 &= (0 - 3)^2 + (2 - a)^2 9 = 9 + 4 - 4a + a^2 a^2 - 4a + 4 = 0a = 2
 \end{aligned}$$

4. M (3, 1)

Utilizando a fórmula para calcular o ponto médio, determinamos a coordenada x:

$$\begin{aligned}
 x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} \\
 x_M &= \frac{4 + 2}{2} \\
 x_M &= \frac{6}{2} \\
 x_M &= 3
 \end{aligned}$$

A coordenada y é calculada utilizando a mesma fórmula:

$$\begin{aligned}
 y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} \\
 y_M &= \frac{3 + (-1)}{2} \\
 y_M &= \frac{3 - 1}{2} \\
 y_M &= \frac{2}{2} \\
 y_M &= 1
 \end{aligned}$$

Logo o ponto médio é (3, 1).

$$5. \quad P = 26,99$$

1º passo: calcular a distância entre os pontos A e B:

$$\begin{aligned}
 d_{AB} &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} d_{AB} = \sqrt{(3 - (-5))^2 + (3 - (-6))^2} \\
 d_{AB} &= \sqrt{8^2 + 9^2} d_{AB} = \sqrt{64 + 81}
 \end{aligned}$$

$$d_{AB} = \sqrt{145}$$

$$d_{AB} \cong 12,04$$

2º passo: calcular a distância entre os pontos A e C:

$$d_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(3 - 4)^2 + (3 - (-2))^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(-1)^2 + 5^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{1 + 25}$$

$$d_{AC} = \sqrt{26}$$

$$d_{AC} \cong 5,1$$

3º passo: calcular a distância entre os pontos B e C:

$$d_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-5 - 4)^2 + (-6 - (-2))^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-9)^2 + (-4)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{81 + 16}$$

$$d_{BC} = \sqrt{97}$$

$$d_{BC} \cong 9,85$$

4º passo: calcular o perímetro do triângulo:

$$p = L_{AB} + L_{AC} + L_{BC}$$

$$p = 12,04 + 5,1 + 9,85$$

$$p = 26,99$$

Exercícios de vestibulares

1. A

A área é dada por

$$\frac{1}{2} \cdot (x_A - x_C) \cdot (y_D - y_B) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$$

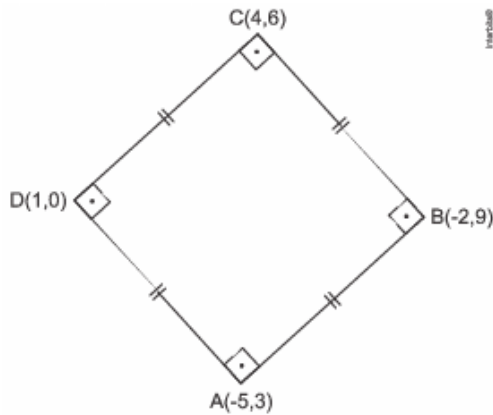
Por outro lado, como

$$d(B, C) = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \cong 3,2$$

Segue que o perímetro mede $4,3,2 = 12,8$

2. D

Do enunciado, temos:



Assim, a área do quadrado acima é dada por:

$$A_{ABCD} = d_{CD}^2 A_{ABCD} = (4 - 1)^2 + (6 - 0)^2$$

$$A_{ABCD} = 9 + 36 A_{ABCD} = 45$$

3. D

Supondo que o quadrilátero convexo seja o quadrilátero ABCD, as diagonais são AC e BD.

$$AC = \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (-3 - 3)^2}$$

$$AC = 10$$

$$BD = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-2 - 1)^2} BD = 5$$

Assim, uma das medidas de suas diagonais é 10.

4. C

A (-2, 1) e B (4, 2)

$$d = \sqrt{4 - (-2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{37} = 6,08 \text{ km}$$

5. D

$$\left(\frac{1 + x_B}{2}, \frac{2 + y_B}{2}\right) = (5, 10) \Leftrightarrow x_B = 9 ; y_B = 18$$

Portanto, podemos concluir que B = (9, 18)

6. D

Sabendo que as coordenadas do baricentro correspondem à média aritmética simples das coordenadas dos vértices do triângulo, temos:

$$\left(\frac{1 + 3 + 5}{3}, \frac{1 - 1 + 3}{3}\right) = (.3, 1)$$

7. E

A distância entre os pontos P e Q no percurso indicado é igual a $(550 - 30) + (320 - 20) = 820$.

Logo, a distância entre T e os pontos P e Q deverá ser de $\frac{820}{2} = 410$. Portanto, como $30 + 410 = 440 < 550$, segue-se que $T = (440, 20)$.

8. D

Utilizando as coordenadas e sabendo que a fórmula da distância entre dois pontos é dada por:

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow D = \sqrt{(9 - 8)^2 + (2 - 8)^2} = \sqrt{1 + (-6)^2} = \sqrt{37}$$

9. C

Por simetria, o imóvel deverá estar sobre a mediatriz do segmento de reta que une o local de trabalho da mãe e o consultório do pai. Tal mediatriz corresponde à rua 4. Ademais, por inspeção, concluímos que a rua horizontal que cumpre a condição é a D.

10. D

Determinando o ponto M (ponto médio do segmento AB), temos:

$$x_M = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{10 + 12}{2} = 11$$

Determinando, agora, o ponto N (ponto médio do segmento CD), temos:

$$x_N = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

$$y_N = \frac{3 + 3}{2} = 3$$

Os pontos pedidos são M (1, 11) e N (1, 3).

Agora, calculando a distância, temos:

$$d_{MN} = \sqrt{(1 - 1)^2 + (11 - 3)^2} = 8$$

Retas: equação reduzida, geral e segmentária

Objetivo

Aprender a determinar a equação de uma reta nas formas geral, reduzida e segmentária. Aprender a transformar a equação de uma das formas para outra. Aprender a determinar os aspectos de uma reta a partir do gráfico.

Se liga

Para essa aula, é importante que você tenha visto a aula de introdução à geometria analítica em que as primeiras noções de geometria analítica são introduzidas. Caso você tenha perdido essa aula ou queira recordar, [clique aqui](#).

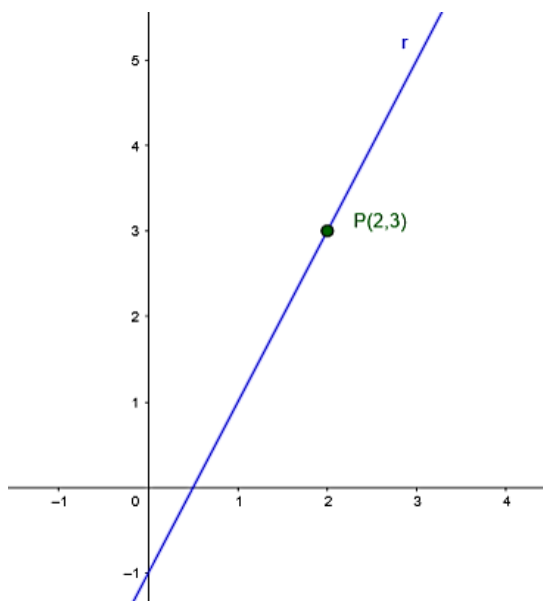
Curiosidade

Você sabia que temos um mapa mental incrível com um resuminho de 5 minutos explicando tudo sobre retas e geometria analítica? [Clique aqui](#) para conferir esse "Quer que desenhe?".

Teoria

A reta

Uma reta é formada por infinitos pontos colineares e, no plano cartesiano, cada ponto é representado por um par ordenado $P(x, y)$.



Equação reduzida da reta

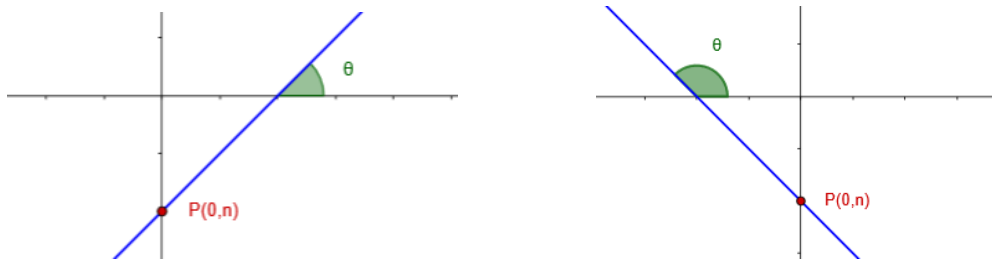
A equação reduzida da reta é dada pelo modelo:

$$y = mx + n$$

Sendo:

- x, y : variáveis
- m : coeficiente angular que pode ser obtido através da $Tg\theta$ ou através de dois pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x, y)$ calculando $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
- n : coeficiente linear, é a coordenada de y onde a reta corta o eixo y

Para transformar uma equação da reta numa equação reduzida, basta isolar o y em um lado da igualdade.



Obs: Quando θ for um ângulo agudo, o coeficiente angular (m) será positivo e quando θ for um ângulo obtuso, o coeficiente angular (m) será negativo.

Equação geral da reta

A equação geral da reta é dada pelo modelo:

$$Ax + By + c = 0$$

Para transformar uma equação da reta numa equação geral, basta pôr todos os termos em um único lado da igualdade, deixando a equação igualada à zero.

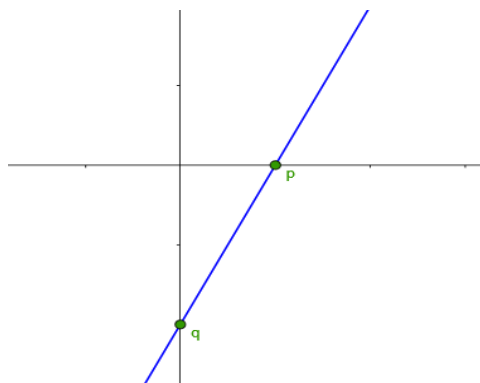
Equação segmentária da reta

A equação segmentária da reta é dada pelo modelo:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Sendo:

- p : a coordenada de x onde a reta corta o eixo x
- q : a coordenada de y onde a reta corta o eixo y

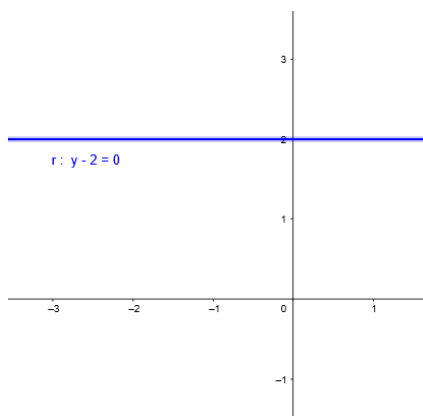


Para transformar uma equação da reta numa equação segmentária, é preciso reorganizar os termos de forma que a equação se iguale a um(1).

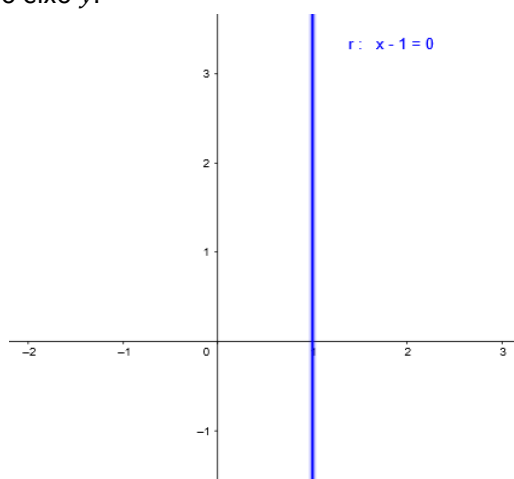
Casos particulares

Quando algum dos coeficientes da equação geral da reta $r: ax + by + c = 0$ for zero, ocorrerá um dos casos abaixo:

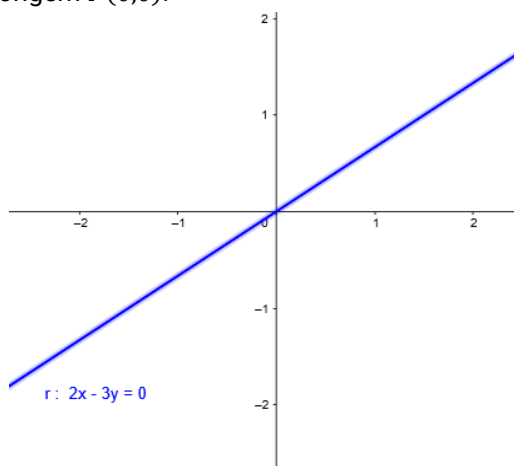
1. $a = 0 \rightarrow$ a reta é paralela ao eixo x .



2. $b = 0 \rightarrow$ a reta é paralela ao eixo y .



3. $c = 0 \rightarrow$ a reta passa pela origem $P(0,0)$.



Exercícios de fixação

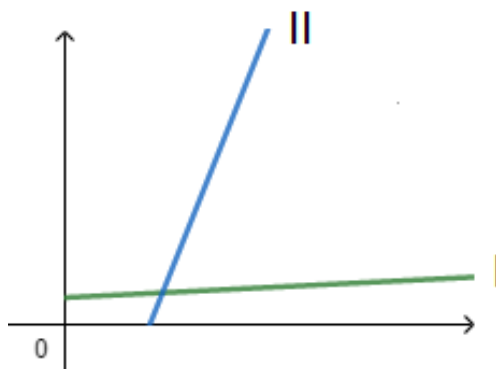
1. Escreva a equação da reta $3x + 9y - 36 = 0$ na forma reduzida.
 2. Determine o coeficiente angular da reta que passa pelo ponto $A(3, 1)$ e $B(-1, 5)$.
 3. Determine a equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(5, -2)$ e $B(4, 2)$.
 4. Mostre que as retas $s: x + 2y - 1 = 0$ e $r: 4x - 2y + 12 = 0$ são perpendiculares.
 5. Sejam duas retas r e s , definidas pelas equações $4x + y = 1$ e $3x + 2y = 2$, respectivamente, com estas informações podemos afirmar que as retas são:
 - a) Iguais
 - b) Perpendiculares
 - c) Concorrentes
 - d) Paralelas
-

Exercícios de vestibulares



1. (UPE, 2017) No plano cartesiano, a reta $s: 4x - 3y + 12 = 0$ intersecta o eixo das abscissas no ponto A e o eixo das ordenadas no ponto B. Nessas condições, qual é a distância entre os pontos A e B?
 - a) 5
 - b) $\sqrt{5}$
 - c) $2\sqrt{2}$
 - d) 2
 - e) $\sqrt{2}$

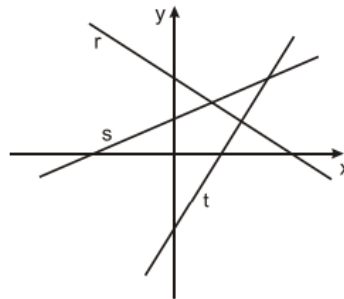
2. (Ufscar, 2004) Considere a relação gráfica:



Podemos afirmar que:

- a) o coeficiente linear de I é negativo.
- b) o coeficiente linear de II é positivo.
- c) ambos os gráficos possuem coeficiente linear zero.
- d) o coeficiente angular do gráfico II é maior que o do gráfico I.
- e) o coeficiente angular do gráfico I é maior que o do gráfico II.

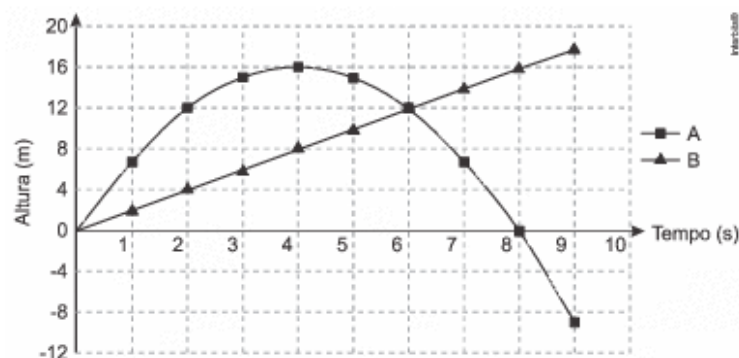
3. (UFRGS, 2012) As equações das retas representadas no sistema de coordenadas cartesianas abaixo são



$$\begin{aligned} 2x + y - 3 &= 0 \\ 5x - 4y - 8 &= 0 \\ x - 3y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

As equações de r e s são, respectivamente,

- a) $2x + y - 3 = 0$ e $x - 3y + 3 = 0$
 b) $2x + y - 3 = 0$ e $5x - 4y - 8 = 0$
 c) $5x - 4y - 8 = 0$ e $x - 3y + 3 = 0$
 d) $x - 3y + 3 = 0$ e $2x + y - 3 = 0$
 e) $x - 3y + 3 = 0$ e $5x - 4y - 8 = 0$
4. (Enem, 2016) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



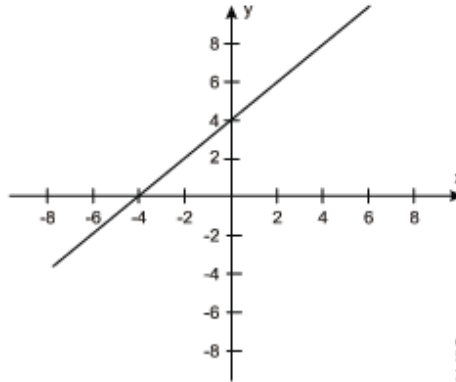
Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

- a) diminuir em 2 unidades.
 b) diminuir em 4 unidades.
 c) aumentar em 2 unidades.
 d) aumentar em 4 unidades.
 e) aumentar em 8 unidades.



5. (UPE, 2011) Sobre a equação reduzida da reta que intercepta o eixo y no ponto $(0,4)$ e o eixo x no ponto $(2,0)$, é correto afirmar que o coeficiente angular
- a) da reta será um número positivo ímpar.
 - b) da reta será um número positivo par.
 - c) da reta será um número negativo cujo módulo é um número ímpar.
 - d) da reta será um número negativo cujo módulo é um número par.
 - e) da reta é nulo.
6. (UFMG, 2013) Para que os pontos A $(x, 3)$, B $(-2x, 0)$ e C $(1, 1)$, sejam colineares, é necessário que x seja
- a) -2
 - b) -1
 - c) 2
 - d) 3
7. (Uece, 2017) Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, as equações $3x - 2y + 6 = 0$ e $3x + 4y - 12 = 0$ representam duas retas concorrentes. A medida da área da região limitada por essas retas e pelo eixo dos x é : **Dados:** u.a. = unidade de área
- a) 9u.a.
 - b) 10u.a.
 - c) 11u.a.
 - d) 12u.a.
-

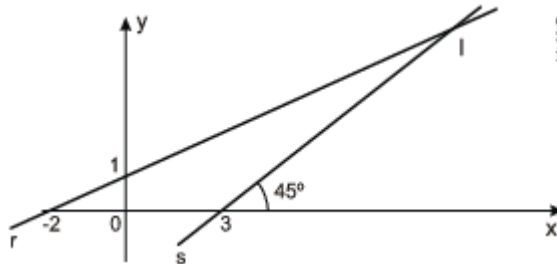
8. (Enem, 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km. Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto:

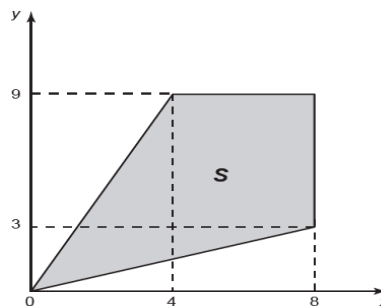
- a) $(-5, 0)$.
- b) $(-3, 1)$.
- c) $(-2, 1)$.
- d) $(0, 4)$.
- e) $(2, 6)$.

9. (Puc, 2012) Suponha que no plano cartesiano mostrado na figura abaixo, em que a unidade de medida nos eixos coordenados é o quilômetro, as retas r e s representam os trajetos percorridos por dois navios, N_1 e N_2 , antes de ambos atracarem em uma ilha, localizada no ponto I .



Considerando que, no momento em que N_1 e N_2 se encontravam atracados em I , um terceiro navio, N_3 , foi localizado no ponto de coordenadas $(26; 29)$, a quantos quilômetros N_3 distava de I ?

- a) 28.
b) 30.
c) 34.
d) 36.
e) 40.
10. (Enem, 2016) Uma região de uma fábrica deve ser isolada, pois nela os empregados ficam expostos a riscos de acidentes. Essa região está representada pela porção de cor cinza (quadrilátero de área S) na figura.



Para que os funcionários sejam orientados sobre a localização da área isolada, cartazes informativos serão afixados por toda a fábrica. Para confeccioná-los, um programador utilizará um *software* que permite desenhar essa região a partir de um conjunto de desigualdades algébricas. As desigualdades que devem ser utilizadas no referido *software*, para o desenho da região de isolamento, são

- a) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $y \leq 8$; $x \leq 9$
b) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$
c) $3y - x \geq 0$; $2y - x \leq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$
d) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 8$; $x \leq 9$
e) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$

Se liga!

Sua específica é matemática e quer continuar treinando esse conteúdo?
Clique [aqui](#) para fazer uma lista extra de exercícios.

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. Para escrever a equação em sua forma reduzida, devemos isolar o y :

$$3x + 9y - 36 = 0 \Rightarrow 9y = -3x + 36 \Rightarrow y = \frac{-3x + 36}{9} = -\frac{3x}{9} + \frac{36}{9} = -\frac{x}{3} + 4$$

2. O coeficiente angular da reta é calculado utilizando a fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5 - 1}{-1 - 3}$$

$$m = -\frac{4}{4}$$

$$m = -1$$

3. Primeiramente vamos encontrar o coeficiente angular da reta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{2 - (-2)}{4 - 5}$$

$$m = \frac{4}{-1}$$

$$m = -4$$

$$(y - y_1) = -4(x - x_1)$$

$$y - 2 = -4(x - 4)$$

$$y - 2 = -4x + 16$$

$$y = -4x + 16 + 2$$

$$y = -4x + 18$$

Portanto, a equação reduzida da reta é $y = -4x + 18$.

4. Temos que

$$s: x + 2y - 1 = 0 \rightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow m_s = -\frac{1}{2}$$

$$r: 4x - 2y + 12 = 0 \rightarrow y = \frac{4x}{2} + \frac{12}{2} \rightarrow m_r = \frac{4}{2} = 2$$

Para que as retas sejam perpendiculares,

$$m_s \cdot m_r = -1$$

Segue que:

$$m_s \cdot m_r = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -\frac{2}{2} = -1$$

Portanto, as retas r e s são perpendiculares.

5. **C**

Primeiramente, vamos ver se as retas possuem pontos em comum. Para isso vamos isolar uma variável e substituir na outra equação.

Assim, isolando y em r , temos: $y = -4x + 1$

Substituindo na equação da retas s , temos:

$$3x + 2(-4x + 1) = 2$$

$$3x - 8x + 2 = 2$$

$$-5x = 2 - 2$$

$$-5x = 0$$

$$x = 0$$

Substituindo x na equação da reta r , temos:

$$y = -4x + 1$$

$$y = -4 \cdot 0 + 1$$

$$y = 1$$

Portanto, as retas possuem o ponto $(0, 1)$ em comum, logo, elas são concorrentes.

Exercícios de vestibulares

1. **A**

Intersecção com o eixo x ($y = 0$).

$$4x - 3 \cdot 0 + 12 = 0 \rightarrow 4x = -12 \rightarrow x = -3 \rightarrow A(-3, 0)$$

Intersecção com o eixo y ($x = 0$).

$$4 \cdot 0 - 3y + 12 = 0 \rightarrow -3y = -12 \rightarrow y = 4 \rightarrow B(0, 4)$$

Logo, a distância entre os pontos A e B será dada por:

$$d = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

2. **D**

Podemos reparar que a reta II cresce mais rapidamente que a reta I. Isso nos mostra que o coeficiente angular da reta II é maior do que o da reta I.

3. **A**

Determinando a equação reduzida de cada equação de reta, temos, de acordo com o valor do coeficiente angular:

$$2x + y - 3 = 0 \rightarrow -2x + 3 \rightarrow \text{Equação da reta } r$$

$$5x - 4y - 8 = 0 \rightarrow y = \frac{5}{4}x - 2 \rightarrow \text{Equação da reta } t$$

$$x - 3y + 3 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 1 \rightarrow \text{Equação da reta } s$$

4. **C**

O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(6, 12)$ é $\frac{12}{6} = 2$. Portanto, sendo $\frac{16}{4} = 4$ o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(6, 12)$, podemos concluir que o coeficiente angular deverá aumentar em $4 - 2 = 2$ unidades.

5. **D**

$$m = \frac{0 - 4}{2 - 0} = -2$$

Número negativo, cujo módulo é um número par.

6. **B**

Para que os pontos A, B e C sejam colineares, basta que :

$$\frac{0 - 3}{-2x - x} = \frac{1 - 0}{1 - (-2x)}$$

$$\begin{aligned}\frac{-3}{-3x} &= \frac{1}{1+2x} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{1+2x} \\ 1+2x &= x \\ x &= -1\end{aligned}$$

7. A

A reta $y = \frac{3}{2}x + 3$ intersecta o eixo das abscissas no ponto $(-2,0)$ e o eixo das ordenadas no ponto $(0,3)$. Já a reta $y = -\frac{3}{4}x + 3$ intersecta o eixo das abscissas no ponto $(4,0)$ e o eixo das ordenadas no ponto $(0,3)$. Desse modo, a região cuja área queremos calcular corresponde ao triângulo de vértices $(-2,0)$, $(0,3)$ e $(4,0)$.

O resultado é dado por

$$\frac{1}{2} \cdot (4 - (-2)) \cdot 3 = 9u.a.$$

8. B

Os únicos pontos das opções das respostas que pertencem à reta são $B(-3,1)$, $D(0,4)$ e $E(2,6)$; Calculando agora a distância de P a cada um deles, temos:

$$\begin{aligned}d_{P,B} &= \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{20} < 5d_{P,D} = \sqrt{(-5 - 0)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{26} > 5d_{P,B} \\ &= \sqrt{(-5 - 2)^2 + (5 - 6)^2} = \sqrt{50} > 5\end{aligned}$$

Logo, o ponto $(-3,1)$ atende às condições do problema.

9. B

Seja $y = m_r x + h_r$ a equação da reta r . Do gráfico segue que $h_r = 1$. Além disso, como r intersecta o eixo x no ponto de abscissa $x = -2$, segue que $0 = m_r \cdot (-2) + 1$ $m_r = \frac{1}{2}$

Por outro lado, como a reta s intersecta o eixo x em $(3,0)$, e o ângulo que ela forma com esse eixo é de 45° , temos que sua equação é $y - 0 = \operatorname{tg}45^\circ \cdot (x - 3)$ $y = x - 3$

As coordenadas do ponto l constituem a solução do sistema formado pelas equações de r e de s :

$$\left\{ \begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + 1 \\ y &= x - 3 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}x + 1 &= x - 3 \\ y &= x - 3 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_l &= 8 \\ y_l &= 5 \end{aligned} \right.$$

Portanto, a distância pedida é dada por

$$\sqrt{(26 - 8)^2 + (29 - 50)^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30km.$$

10. E

A equação da reta que passa pelos pontos $(0,0)$ e $(4,9)$ é $y = \frac{9}{4}x$, isto é, $9x - 4y = 0$. Ademais, a equação da reta que passa pelos pontos $(0,0)$ e $(8,3)$ é $y = \frac{3}{8}x$, ou seja, $3x - 8y = 0$. Portanto, podemos ver que a região S é limitada pelas desigualdades $9x - 4y \geq 0$, $3x - 8y \leq 0$, $x \leq 8$ e $y \leq 9$, que é o mesmo que dizer que $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$.

Retas: paralelismo, perpendicularismo e distância de ponto à reta

Objetivo

Aprender a identificar o paralelismo e o perpendicularismo entre retas, entender o que gera essa relação e aprender a calcular a distância entre um ponto e uma reta.

Se liga

Para essa aula, é importante que você tenha visto a aula de introdução à geometria analítica em que as primeiras noções de geometria analítica são introduzidas. Caso você tenha perdido essa aula ou queira recordar, [clique aqui](#).

Curiosidade

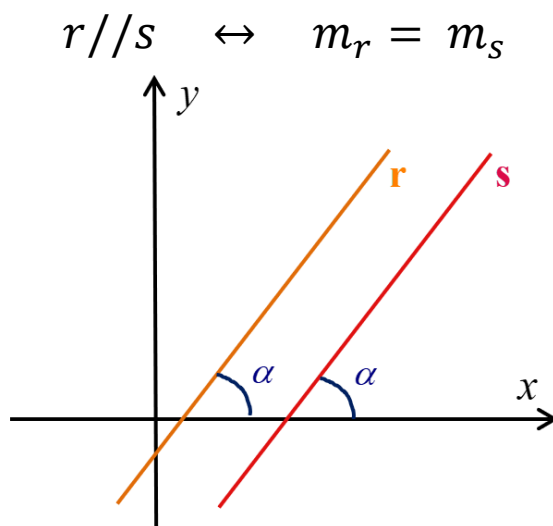
Você sabia que temos um mapa mental incrível com um resuminho de 5 minutos explicando tudo sobre retas e geometria analítica? [Clique aqui](#) para conferir esse “Quer que desenhe?”.

Teoria

Posições relativas entre retas

Retas paralelas

Duas retas r e s são paralelas quando apresentam a mesma inclinação em relação ao eixo x , ou seja, possuem o mesmo coeficiente angular.



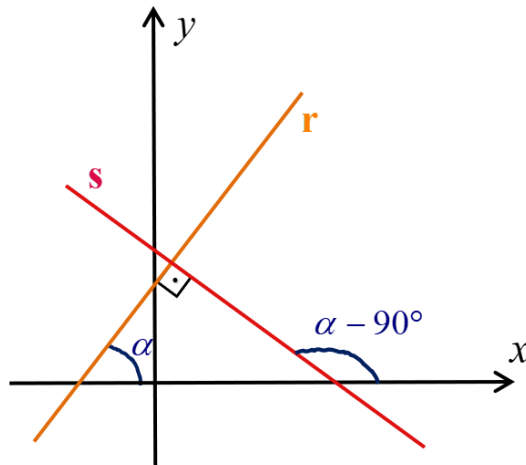
Obs₁: A distância entre duas retas paralelas é sempre a mesma e elas não possuem pontos em comum.

Obs₂: Se $m_1 \neq m_2$ então elas são concorrentes.

Retas perpendiculares

Duas retas r e s são perpendiculares se o produto de seus coeficientes angulares for igual a -1 , ou seja, os coeficientes angulares são opostos e inversos.

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$



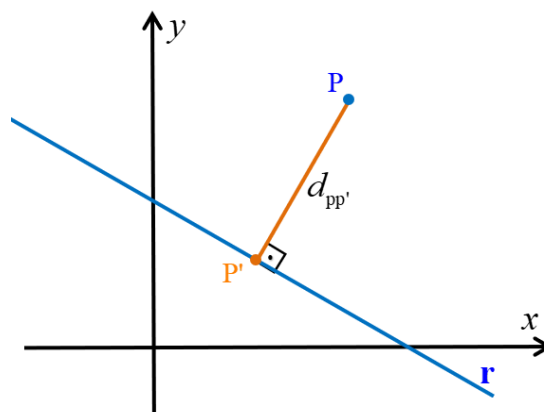
Obs: no ponto de interseção de duas retas perpendiculares é formado um ângulo reto (um ângulo de 90°).

Distância de um ponto a uma reta

Dadas uma reta $r: ax + by + c = 0$ e um ponto $P(x_0, y_0)$, a distância do ponto P à reta r é dada pela fórmula:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Onde a , b e c são os coeficientes da reta r e x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto P.



Exercícios de fixação

1. Verifique se as retas $r: 2x + 3y - 7 = 0$ e $s: -10x - 15y + 45 = 0$ são paralelas.
 2. Encontre a equação da reta s , perpendicular à reta $t: 2x + 3y - 4 = 0$, sabendo que ela passa pelo ponto $P(3,4)$.
 3. Determine a equação geral da reta t que passa pelo ponto $P(1,2)$ e é paralela à reta r de equação $8x - 2y + 9 = 0$.
 4. Considere no plano cartesiano uma reta r de equação $3x + 5y + 1 = 0$ e um ponto Q de coordenadas $(5,5)$. Determine a equação da reta s perpendicular a r passando por Q .
 5. Determine a equação da reta s , perpendicular a reta r de equação $3x + 2y - 4 = 0$, no ponto em que esta intersecta o eixo das abscissas.
-

Exercícios de vestibulares



1. (Unioeste, 2014) Os valores de k para que as retas $2x + ky = 3$ e $x + y = 1$ sejam paralelas e perpendiculares entre si, respectivamente, são
- a) $-\frac{3}{2}$ e 1.
 - b) -1 e 1.
 - c) 1 e -1 .
 - d) -2 e 2.
 - e) 2 e -2 .
2. (Ucpel, 2009) As retas $2x + 3y = 1$ e $6x - ky = 1$ são perpendiculares. Então, k vale
- a) 2
 - b) 1
 - c) 3
 - d) 4
 - e) 5
3. (Eear, 2016) A reta s que passa por $P(1,6)$ e é perpendicular $y = \frac{2}{3}x + 3$ a r é:
- a) $y = \frac{3}{2}x$
 - b) $y = x + 5$
 - c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$
 - d) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$
4. (Eear, 2019) Considere os pontos $A(2, 3)$ e $B(4, 1)$ e a reta $r: 3x + 4y = 0$. Se $d_{A,r}$ e $d_{B,r}$ são, respectivamente, as distâncias de A e de B até a reta r , é correto afirmar que
- a) $d_{A,r} > d_{B,r}$
 - b) $d_{A,r} < d_{B,r}$
 - c) $d_{A,r} = d_{B,r}$
 - d) $d_{A,r} = 2d_{B,r}$
-



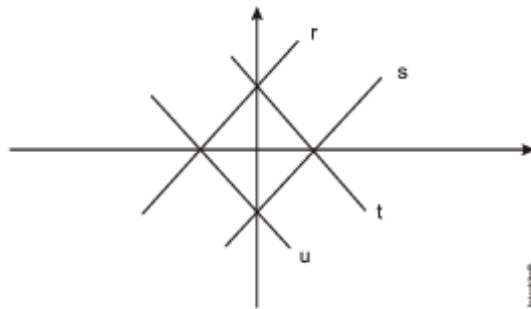
5. (FGV, 2012) Na figura abaixo, temos quatro retas $r \parallel s$ e $t \parallel u$, cujas equações são:

(r) : $y = m_1x + n_1$

(s) : $y = m_2x + n_2$

(t) : $y = m_3x + n_3$

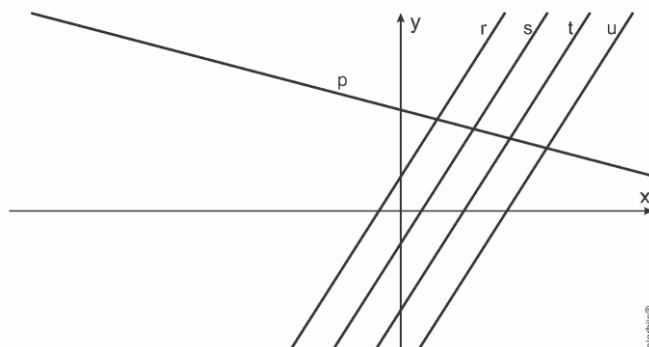
(u) : $y = m_4x + n_4$



Podemos afirmar que:

- a) $m_1 = m_2$ e $n_1 < 0$
 - b) $m_1 = m_2$ e $n_2 < 0$
 - c) $m_3 = m_4$ e $n_3 < 0$
 - d) $m_3 = m_4$ e $n_4 > 0$
 - e) $n_1 = n_2$ e $m_1 > 0$
6. (Epcar, 2012) Considere no plano cartesiano as retas r e s dadas pelas equações:
- $r : 3x + 3py + p = 0$ e
- $s : px + 9y - 3 = 0$
- com $p \in \mathbb{R}$.
- Baseado nessas informações, marque a alternativa INCORRETA.
- a) r e s são retas concorrentes se $|p| \neq 3$.
 - b) Existe um valor de p para o qual r é equação do eixo das ordenadas e s é perpendicular a r .
 - c) r e s são paralelas distintas para dois valores reais de p .
 - d) r e s são retas coincidentes para algum valor de p .

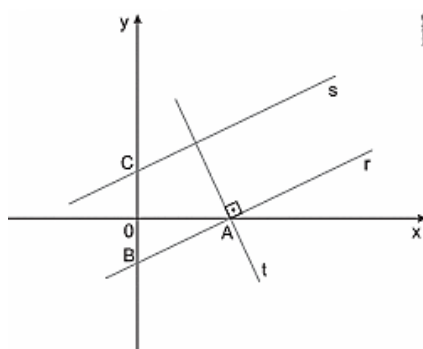
7. (Ueg, 2017) Na figura a seguir, as retas r, s, t, u são paralelas e seus coeficientes lineares estão em uma progressão aritmética de razão -2.



Sabendo-se que a equação da reta p é $y = -\frac{1}{2}x + 3$ e da reta u é $y = 3x - 5$, o ponto de intersecção da reta p com reta s é

- a) $\left(\frac{4}{7}, \frac{19}{7}\right)$
- b) $\left(\frac{8}{7}, \frac{17}{7}\right)$
- c) $\left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right)$
- d) $\left(\frac{16}{7}, \frac{13}{7}\right)$
- e) $\left(\frac{18}{7}, \frac{11}{7}\right)$

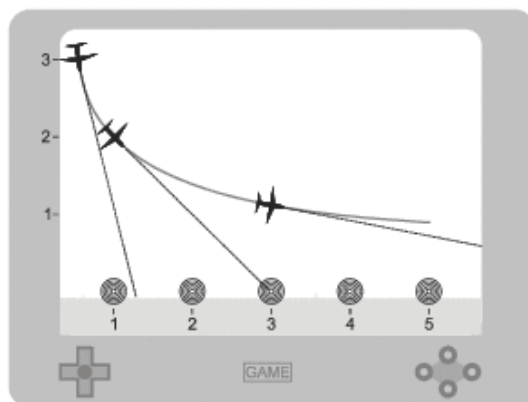
8. (Upf, 2017) Sobre a figura abaixo, sabe-se que a equação de r é $2y = x - 3$; que os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo das abscissas; que as retas r e s são paralelas; e que t é perpendicular a r .



Nessas condições, a equação da reta t é:

- a) $y = -2x + 6$
- b) $y = -\frac{1}{2}x + 6$
- c) $2y = -x + 6$
- d) $y + 2x = 3$
- e) $y = \frac{x-6}{2}$

9. (UFSM, 2014) A figura mostra um jogo de videogame, em que aviões disparam balas visando a atingir o alvo. Quando o avião está no ponto $(1, 2)$, dispara uma bala e atinge o alvo na posição $(3, 0)$.



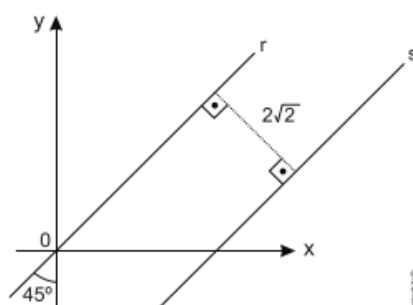
Sendo r a reta determinada pela trajetória da bala, observe as seguintes afirmativas:

- I. O ponto $P(1/2, 5/2)$ pertence a r .
- II. A reta r é perpendicular à reta que passa pela origem e pelo ponto médio do segmento AB, onde $A(0, 3)$ e $B(3, 0)$.
- III. A reta r é paralela à reta $s: 2x - 2y + 5 = 0$.

Está(ão) correta(s)

- a) apenas I.
- b) apenas I e II.
- c) apenas III.
- d) apenas II e III.
- e) I, II e III.

10. (Mackenzie, 2012) Na figura, as retas r e s são paralelas. Se (x, y) é um ponto de s , então $x - y$ vale



- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 6
- e) 5

Se liga!

Sua específica é matemática e quer continuar treinando esse conteúdo?
Clique [aqui](#) para fazer uma lista extra de exercícios.

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. Solução: Vamos determinar o coeficiente angular de cada uma das retas.

Para encontrar o coeficiente angular precisamos isolar y na equação geral da reta.

$$\text{Reta } r: 2x + 3y - 7 = 0$$

$$2x + 3y - 7 = 0 \Rightarrow 3y = -2x + 7 \Rightarrow y = -\frac{2x}{3} + \frac{7}{3}$$

$$m_r = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Reta } s: -10x - 15y + 45 = 0$$

$$-10x - 15y + 45 = 0 \Rightarrow 15y = -10x + 45$$

$$y = -\frac{10x}{15} + \frac{45}{15}$$

$$y = -\frac{2x}{3} + 3$$

Como $m_r = m_s = -\frac{2}{3}$, podemos afirmar que $r \parallel s$

2. Para a reta $t: 3y = -2x + 4 \rightarrow y = -\frac{2x}{3} + \frac{4}{3} \rightarrow m_t = -\frac{2}{3}$

Como s é perpendicular a t , então

$$m_s \cdot m_t = -1 \rightarrow m_s = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Temos um ponto da reta s e seu coeficiente angular. Assim, a equação da reta s será dada por:

$y - y_0 = m_s \cdot (x - x_0)$, onde x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto P . Logo,

$$y - 4 = \frac{3}{2} \cdot (x - 3) \Rightarrow y - 4 = \frac{3x - 9}{2} \Rightarrow 2y - 8 = 3x - 9$$

Organizando os termos, teremos:

$$3x - 9 - 2y + 8 = 0$$

$$3x - 2y - 1 = 0, \text{ que é a equação da reta } s.$$

3. Para determinar a equação de uma reta basta conhecermos um ponto dessa reta e seu coeficiente angular. Já conhecemos o ponto $P(1, 2)$ da reta procurada, agora resta encontrar o seu coeficiente angular. Como a reta t é paralela à reta s , elas possuem o mesmo coeficiente angular. Assim, utilizando a equação da reta r iremos determinar o coeficiente angular. Segue que:

$$8x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow -2y = -8x - 9 \Rightarrow y = 4x + \frac{9}{2} \Rightarrow y = 4x + \frac{9}{2}m_r = 4$$

Podemos afirmar que $m_t = 4$. Conhecendo um ponto da reta e seu coeficiente angular, utilizamos fórmula abaixo para determinar sua equação.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Onde x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto pertencente à reta. Teremos:

$$y - 2 = 4(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 4x - 4 \Rightarrow 4x - y - 4 + 2 = 0$$

$$4x - y - 2 = 0 \rightarrow \text{Equação geral da reta } t.$$

4. Equação de $r: 3x + 5y + 1 = 0 \rightarrow y = -\frac{3x}{5} - \frac{1}{5} \rightarrow m_r = -\frac{3}{5}$
-

Sabemos que $m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow m_s = \frac{-1}{\frac{-3}{5}} \rightarrow m_s = \frac{5}{3}$

Conhecendo o coeficiente angular e um ponto da reta s, podemos aplicar a fórmula:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \quad y - 5 = \frac{5}{3} \cdot (x - 5) \quad y - 5 = \frac{5x - 25}{3} \quad 3y - 15 = 5x - 25 \quad 5x - 3y - 25 + 15 = 0$$

$5x - 3y - 10 = 0$ que é a equação da reta s.

5. O coeficiente angular da reta r é $m_r = -\frac{3}{2}$

Quando a reta intersecta o eixo das abscissas, $y = 0$, assim

$$3x + 2 \cdot 0 - 4 = 0 \quad x = \frac{4}{3} \quad P\left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

O coeficiente angular da reta perpendicular, será:

$$m_s = -\frac{1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Assim, a equação da reta perpendicular é:

$$y - 0 = \frac{2}{3}\left(x - \frac{4}{3}\right) \rightarrow 3y = 2x - \frac{8}{3} \rightarrow 2x - 3y - \frac{8}{3} = 0$$

Exercícios de vestibulares

1. E

$$(r): 2x + ky = 3 \Rightarrow m_r = -\frac{2}{k}$$

$$(s): x + y = 1 \Rightarrow m_s = -1$$

$$\text{Para que r seja paralela a s: } m_r = m_s \Rightarrow -\frac{2}{k} = -1 \Rightarrow k = 2$$

$$\text{Para que r seja perpendicular a s: } m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow -\frac{2}{k} \cdot (-1) = -1 \Rightarrow k = -2$$

2. D

$$(r): 2x + 3y = 1 \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3} \quad (s): 6x - ky = 1 \Rightarrow m_s = \frac{6}{k}$$

$$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{6}{k}\right) = -1 \Rightarrow -12 = -3k \Rightarrow k = 4$$

3. D

Sabendo que o coeficiente angular da reta r é $\frac{2}{3}$ e que o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é -1, podemos escrever:

$$m_s \cdot \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{3}{2}$$

Logo, a equação da reta r será dada por:

$$y - 6 = -\frac{3}{2} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + 6 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$$

4. A

Do enunciado, temos:

$$d_{A,r} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \quad d_{A,r} = \frac{18}{5}$$

$$d_{B,r} = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} d_{B,r} = \frac{16}{5}$$

Portanto,

$$d_{A,r} > d_{B,r}$$

5. B

$$r // s \Rightarrow m_1 = m_2$$

$n_2 < 0$, pois a reta s intercepta o eixo y abaixo da origem.

6. D

a) Verdadeira. De fato, pois se

$$\frac{3}{p} \neq \frac{3p}{9} \Leftrightarrow p^2 \neq 9 \Leftrightarrow |p| \neq 3, \text{ então, as retas são concorrentes.}$$

b) Verdadeira. Com efeito, pois se $p = 0$, então $r: x = 0$ e $s: y = \frac{1}{3}$.

c) Verdadeira. De fato, pois se

$$\frac{3}{p} = \frac{3p}{9} \neq \frac{p}{-3} \Leftrightarrow p = \pm 3$$

Então r e s são paralelas distintas.

d) Falsa. As retas r e s serão coincidentes se existir algum valor real de p para o qual se tenha $\frac{3}{p} = \frac{3p}{9} = \frac{p}{-3}$. Porém, tal sistema é impossível e, assim, não existe p real de tal sorte que r e s sejam coincidentes.

7. B

Podemos ver que a equação da reta s é $y = 3x - 1$. Desse modo, a abscissa do ponto de interseção das retas p e s é tal que

$$3x - 1 = -\frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{8}{7}.$$

Portanto, temos $y = 3 \cdot \frac{8}{7} - 1 = \frac{17}{7}$ e a resposta é $\left(\frac{8}{7}, \frac{17}{7}\right)$.

8. A

O coeficiente angular da reta r é $\frac{1}{2}$ e a reta t é perpendicular à reta r , logo $m_t = -2$. Para determinar as coordenadas do ponto A devemos considerar $y = 0$ na equação da reta r , logo:

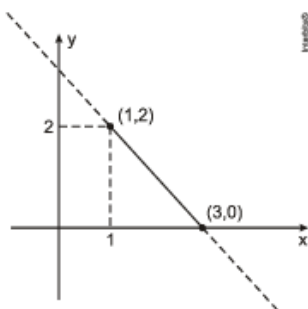
$$2y = x - 32 \cdot 0 = x - 3x = 3$$

Portanto, o ponto A será $A(3, 0)$ e a equação da reta t será:

$$y - 0 = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 6$$

9. B

Considerando a reta r representada abaixo, temos:



Equação da reta r : $y - 0 = \frac{0-2}{3-1} \cdot (x - 3) \Rightarrow x + y - 3 = 0$

I. Verdadeira, pois $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = 0$

II. Verdadeira.

Ponto médio de AB

Coefficiente angular da reta citada neste item:

$$\frac{\frac{3}{2} - 0}{\frac{3}{2} - 0} = 1$$

Como $1 \cdot (-1) = -1$, a reta citada é perpendicular a reta r .

III. Falsa, pois o coeficiente angular da reta s é 1, diferente do coeficiente angular da reta r que é -1

10. C

Seja $A = (\alpha, 0)$ o ponto de interseção da reta s com o eixo das abscissas.

Como a distância de A até a reta r é igual $2\sqrt{2}$ e o ângulo que a reta r forma com o eixo das abscissas mede 45° , segue que $\alpha = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$.

Portanto, $x - y = \alpha - 0 = 4 - 0 = 4$